Über

die Kriterien für die Singularitäten

rationaler Kurven vierter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der Universität München

im Jahre 1883 vorgelegt

von

Georg Kerschensteiner

aus München.

Nürnberg.

Gedruckt bei U. E. Sebald.

1888.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548316_0105

Über

die Kriterien für die Singularitäten

rationaler Kurven vierter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der Universität München

im Jahre 1883 vorgelegt

von

Georg Kerschensteiner

aus München.

Nürnberg.

Gedruckt bei U. E. Sebald.

1888.

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil.

Seite

§ 1. Gleichungen für die Wendepunkte, Doppelpunkte und Doppeltangenten; Bedingungen für das Auftreten eines Cuspidal-, resp. Undulationspunktes 4

§ 2. Vereinfachung der Formen W, T, D, U, C durch spezielle Wahl des Koordinatendreieckes 7

§ 3. Die fünf Kurventypen einer Wendepunktsgleichung 8

§ 4. Transformationsgleichungen 12

§ 5. Die Gleichungen der Cuspidal- und Undulationsfläche jedes Raumes 14

§ 6. Die Discriminante reciproker Gleichungen vom Grade $2n$ 17

§ 7. Diskussion des Flächenpaares im Raume R_1 19

§ 8. Die Wendepunktskriterien der 14 Zellen des Raumes R_1 23

§ 9. Diskussion des Flächenpaares im Raume R_2 24

§ 10. Die Wendepunktskriterien der 19 Zellen des Raumes R_2 29

§ 11. Kriterien für die Realität der Wurzeln einer Gleichung 6ten Grades 30

II. Teil.

§ 12. Transformation des Raumes R_1 in sich 33

§ 13. Transformation des Raumes R_2 in sich 36

§ 14. Zellenkorrespondenz im Raume R_2 und die Korrespondenz beider Räume mit einander 39

§ 15. Die Doppelpunkts- und Doppeltangentenformen im Raume R_2 . . . 43

§ 16. Die Doppelpunkts- und Doppeltangentenformen im Raume R_1 . . . 50

§ 17. Über das Wesen der Bedingung $\alpha_0 = +1$ 53

§ 18. Diskussion des Raumes R_3 für $\alpha_0 > = 0$ 54

§ 19. Diskussion des Raumes R_2 für $\alpha_0 < 0$ 57

§ 20. Schlufsbemerkungen 61

Berichtigung:

Auf Seite 11 ist in Zeile 7 v. o. zu lesen: $1 + 2\alpha_2\beta_4$, statt $1 + \alpha_2\beta_4$
und entsprechend „ „ 6 v. u. „ „ : $1 + 2\xi\zeta$, statt $1 + \xi\zeta$.

Einleitung.

Definiert man die rationale Kurve 4ter Ordnung C^4 dadurch, dafs man ihre auf ein beliebiges Dreieck bezogenen Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ dreien Funktionen $f_1 f_2 f_3$ proportional setzt, die in λ bis zum 4ten Grade steigen, so wird diese Darstellung sämtliche *typischen* Fälle der rationalen C^4 umfassen. Die einzelnen Typen werden sich unterscheiden durch die Realitätsverhältnisse ihrer Singularitäten, insbesondere der *Doppel-* und *Wendepunkte* und der *Doppeltangenten*. Zwischen je zweien der Typen wird ein bestimmter Übergangstypus liegen, sei es eine zerfallende C^4, oder eine Kurve, die durch Cuspidal-*) oder Undulations-*) oder Selbstberührungspunkte ausgezeichnet ist. Durch das Auftreten eines Cuspidal- oder Undulationspunktes werden aber zwei Wendepunkte absorbiert. Man überzeugt sich hievon leicht, wenn man allmählich eine Doppelpunktschleife zu einer Spitze zusammenzieht, oder die zwei Berührpunkte einer Doppeltangente erster Art zusammenrücken läfst zu einem Undulationspunkte: *jedesmal fallen zwei Wendepunkte in der Singularität zusammen.* Stellt man daher aus der oben erwähnten Parameterdarstellung der C^4 deren Wendepunktsgleichung auf und bildet deren Discriminante (Δ), und entwickelt andererseits die Bedingungen für das Auftreten eines Cuspidal- und Undulationspunktes: $(C) = 0$ und $(U) = 0$, so läfst sich schliefsen, dafs (C) und (U) Faktoren der Discriminante (Δ) sein müssen, da ja ihr Verschwinden dieselbe Wirkung hat, wie das Verschwinden von (Δ): nämlich das Zusammenfallen zweier Wendepunkte. In der That lehrt eine Abzählung des Grades in den Koefficienten dieser drei Formen, dafs die Gleichung besteht

$$\Delta = \rho \cdot C \cdot U,$$

wo ρ eine bestimmte Konstante ist.**)

*) Spitze oder vierpunktige Berührung; wegen der Definitionen der Plückerschen und höheren Singularitäten vergl. man am besten Salmon-Fiedler, ebene Kurven, Art. 244.

**) Man sehe A. Brill, Math. Annalen B. XII.

Zu dieser interessanten Eigenschaft der Wendepunktsgleichung einer rationalen C^4, dafs ihre Discriminante immer in zwei Faktoren zerfällt, die überdies eine so wichtige geometrische Bedeutung haben, tritt noch die weitere, dafs man durch eine geeignete Transformation der C^4 die Konstanten der Wendepunktsgleichung auf *drei* von einander unabhängige reduzieren kann. Diese beiden Umstände machen die Wendepunktsform in hohem Grade zum Ausgangspunkt für das Studium der Kurventypen C^4 geeignet. Ist sie nämlich so transformiert, dafs sie nur mehr drei Konstante enthält, so kann man diese als Punktkoordinaten im Raume deuten*) und die gleich null gesetzten Faktoren C und U als Flächen in demselben. Variiert man die Koefficienten der Kurve C, dann nehmen auch diese drei Konstanten andere und andere Werte an oder geometrisch, der durch sie dargestellte Punkt durchwandert den ganzen Raum, der durch die beiden Flächen $C = 0$ und $U = 0$ in eine Reihe von Zellen geteilt ist. So oft der Punkt eine Fläche durchschreitet, geht auch die Discriminante Δ der Wendepunktsform durch Null hindurch und es tritt eine Änderung in den Realitätsverhältnissen sowohl der Wendepunkte als auch der Doppelpunkte und Doppeltangenten ein. Da im Innern jeder Zelle weder C noch U verschwinden, so wird jede Zelle durch ein einziges Realitätsverhältnis der bezeichneten Singularitäten im allgemeinen charakterisiert sein,**) oder: *Alle C^4 einer Zelle gehören einem einzigen Typus an.*

Während sich nun aber diese drei Konstanten bei *vorgegebener* C^4 ganz eindeutig aus dem Koefficienten derselben bestimmen, so dafs man von einer bestimmten C^4 immer auch nur zu einem bestimmten Punkte gelangt, d. h. zu *einer* Wendepunktsgleichung, ergeben sich umgekehrt aus den drei Konstanten einer *vorgegebenen Wendepunktsgleichung* die Koefficienten der C^4 nicht mehr rational, vielmehr zeigt sich, dafs zu einer gegebenen Wendepunktsgleichung immer *fünf* Kurven gehören, die deren Wurzeln als Wendepunktsparameter haben.***) Man kann das Studium der einzelnen Kurven-

*) Diese Methode wurde zuerst von Kronecker und Sylvester angewendet; später von A. Brill: Realitätsverhältnisse der Wurzeln der Gleichung 6ten Grades, Mathemat. Annal. B. XX.

**) Es wird sich zeigen, dafs die Flächen C und U zur Trennung der einzelnen Typen nicht genügen.

***) Mathemat. Annalen B. XX. —

Vergl. auch die von mir herausgegebenen Vorlesungen Gordans über Invariantentheorie Bd. II, Nr. 273, Seite 296.

typen, indem man die Wendepunktsgleichung als Ausgangspunkt wählt, geradezu an die Frage knüpfen:

„*Welches sind die fünf Kurventypen* C^4, *deren Wendepunkte irgendwelche vorgegebene Parameterwerte haben?*“

Die Lösung dieser Aufgabe ist das erste Ziel dieser Abhandlung; dabei werden sich als Kriterien der Kurventypen nicht nur deren Doppelpunkts- und Doppeltangenteneigenschaften ergeben, sondern auch die *Anzahl* der einem bestimmten Typus zukommenden *reellen Wendepunkte*, die bisher noch nicht für *jeden* der Typen allgemein festgestellt werden konnte.

Zugleich stellt sich die Lösung einer zweiten Aufgabe ein. Da nämlich die Wendepunktsgleichung wegen der einer jeden C^4 im allgemeinen zukommenden sechs Wendepunkte, notwendig vom 6ten Grade in λ sein mufs, so involviert die Frage nach den reellen Wendepunkten auch die Frage nach den reellen Wurzeln einer Gleichung 6ten Grades. Herr Prof. Brill hat gezeigt (vgl. a. a. O.), dafs sich die allgemeine Gleichung 6ten Grades durch Adjunktion der Wurzeln einer Gleichung 5ten und 3ten, resp. 5ten und 4ten Grades auf zwei Normalformen bringen läfst, welche nur drei wesentliche Konstanten enthalten. Für die eine derselben gab er gleichzeitig Kriterien für die Realitätsverhältnisse der Wurzeln; für die andere werden wir sie hier entwickeln.

Die vorliegende Aufgabe wurde mir in Form der obigen Fragestellung im Jahre 1882 von Herrn Prof. Brill gegeben; ihm danke ich auch die erste Einführung in dieselbe und in seine eigenen für diese Arbeit grundlegenden Untersuchungen. Diese Schuld des Dankes möchte ich hiemit abtragen. Im Jahre 1883 reichte ich die Arbeit der philosophischen Fakultät zu München als Dissertation ein. Die Veröffentlichung derselben wurde aber durch verschiedene Umstände verhindert, insbesondere durch die von mir in den letzten vier Jahren besorgte Herausgabe der *Gordan*schen Vorlesungen über Invarianten theorie und seiner einschlägigen Arbeiten.

I. Teil.

§ 1. Gleichungen für die Wende- und Doppelpunkte und Doppeltangenten; Bedingungen für das Auftreten eines Cuspidal- resp. Undulationspunktes.*)

Es sei die rationale Kurve C^4 gegeben durch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= a_1 + b_1\lambda + c_1\lambda^2 + d_1\lambda^3 + e_1\lambda^4\\ \rho x_2 &= a_2 + b_2\lambda + c_2\lambda^2 + d_2\lambda^3 + e_2\lambda^4\\ \rho x_3 &= a_3 + b_3\lambda + c_3\lambda^2 + d_3\lambda^3 + e_3\lambda^4\end{aligned}$$

Die Kurve wird von irgend einer Geraden

$$(G) \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

in vier Punkten getroffen, deren Parameter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 die Wurzeln einer Gleichung 4ten Grades sind, die man auch schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned}+\sigma\cdot\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3\\ -\sigma\cdot\Sigma(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3\\ +\sigma\cdot\Sigma(\lambda_1\lambda_2) &= \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3\\ -\sigma\cdot\Sigma(\lambda_1) &= \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3\\ +\sigma\cdot 1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Indem man aus diesen fünf Gleichungen α_1, α_2, α_3, $\sigma\lambda_4$, σ eliminiert, erhält man als Bedingung, dafs drei Punkte der C^4 mit den Parameterwerten $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ auf einer Geraden liegen, die gleich null zu setzende Determinante:

$$W(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & A & 0\\ b_1 & b_2 & b_3 & -B & -A\\ c_1 & c_2 & c_3 & C & B\\ d_1 & d_2 & d_3 & -1 & -C\\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 1\end{vmatrix}, \quad (II)$$

wobei $A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$, $C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

2) Fallen die drei Werte λ zusammen, d. h. ist die Gerade Wendetangente, dann erhält man, indem man in $W(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ setzt, die Determinante nach den Unterdeterminanten der beiden letzten Kolonnen entwickelt und die zugehörigen Minoren mit $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\beta_2\beta_3\beta_4$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}W(\lambda) \equiv \alpha_0\lambda^6 + 3\alpha_1\lambda^5 + 3(\alpha_2 + 2\beta_2)\lambda^4 + (\alpha_3 + 8\beta_3)\lambda^3\\ + 3(\alpha_4 + 2\beta_4)\lambda^2 + 3\alpha_5\lambda + \alpha_6 = 0\end{aligned}$$

*) Brill, Mathem. Annalen, Bd. XII.

Die zehn Minoren der drei ersten Kolonnen in (II):

$\alpha_0 = (cde)$, $\alpha_1 = (bde)$, $\alpha_2 = (bce)$, $\alpha_3 = (bcd)$, $\alpha_4 = (acd)$, $\alpha_5 = (abd)$, $\alpha_6 = (abc)$, $\beta_2 = (ade)$, $\beta_3 = (ace)$, $\beta_4 = (abe)$ sind nicht unabhängig von einander; vielmehr bestehen zwischen ihnen folgende fünf Identitäten:

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4 + \alpha_0\alpha_5 = 0 \\ \beta_3\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4 + \alpha_0\alpha_6 = 0 \\ \beta_4\alpha_3 - \alpha_2\alpha_5 + \alpha_1\alpha_6 = 0 \\ \beta_2\alpha_6 - \beta_3\alpha_5 + \beta_4\alpha_4 = 0 \\ \beta_4\alpha_0 - \beta_3\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 = 0, \end{array} \right.$$

von denen indes nur *drei* selbständig sind.

3) Gehören ferner die Parameter λ_1 und λ_2 den zwei Zweigen eines Doppelpunktes an, so wird der Parameter λ_3 eines dritten Schnittpunktes der Geraden, die durch den Doppelpunkt geht, unbestimmt. Ordnet man dann $W(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = 0$ nach Potenzen von λ_3, so müssen wegen dieser Unbestimmtheit von λ_3 die Koefficienten einzeln verschwinden. Die drei Koefficienten der in λ_3 quadratischen Gleichung

$$W(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \equiv D_1(\lambda_1\lambda_2)\,\lambda_3^2 + D_2(\lambda_1\lambda_2)\,\lambda_3 + D_3(\lambda_1\lambda_2) = 0$$

einzeln gleich null gesetzt, liefern also in ihren gemeinschaftlichen Lösungen die Doppelpunktsparameter.

Diese drei Doppelpunktsgleichungen $D_1(\lambda_1\lambda_2) = 0$, $D_2(\lambda_1\lambda_2) = 0$ $D_3(\lambda_1\lambda_2) = 0$ sind die Determinanten der Matrix:

$$D' \equiv \left\| \begin{array}{cccc} a_1 a_2 a_3 & +\lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ b_1 b_2 b_3 & -(\lambda_1+\lambda_2) & -\lambda_1\lambda_2 & 0 \\ c_1 c_2 c_3 & +1 & +(\lambda_1+\lambda_2) & +\lambda_1\lambda_2 \\ d_1 d_2 d_3 & 0 & -1 & -(\lambda_1+\lambda_2) \\ e_1 e_2 e_3 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right\| = 0$$

welche durch Unterdrückung einer der drei letzten Kolonnen entstehen. Ein solches System von Gleichungen ist immer irgend zweien derselben äquivalent.*)

4) Die Gleichungen für die Berührpunktsparameter der Doppeltangenten, erhält man aus dem Systeme (I), indem man ausdrückt, dafs je zwei der vier Wurzeln λ zusammenfallen, also $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \nu$ setzt, und nun $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\sigma$ eliminiert; man erhält so die Matrix

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, Bd II, Art. 408.

$$T' \equiv \begin{Vmatrix} a_1\, a_2\, a_3 & \mu^2\nu^2 \\ b_1\, b_2\, b_3 & -2\mu\nu\,(\mu+\nu) \\ c_1\, c_2\, c_3 & 2(\mu\nu+\mu+\nu) \\ d_1\, d_2\, d_3 & -2(\mu+\nu) \\ e_1\, e_2\, e_3 & 1 \end{Vmatrix} = 0$$

deren fünf Gleichungen ebenfalls irgend zweien äquivalent sind.

Setzt man in D′ und T′

$$\lambda_1\lambda_2 = p,\ \lambda_1+\lambda_2 = s \text{ resp. } \mu\nu = p,\ \mu+\nu = s$$

so erhält man an Stelle der Matrix D' die drei Gleichungen

$$(D)\quad \begin{cases} 1)\ p^2\alpha_0 + ps\alpha_1 + s^2\beta_2 + p\,(\alpha_2-\beta_2) + s\beta_3 + \beta_4 = 0 \\ 2)\ p^2\alpha_1 + ps(\alpha_2+\beta_2) + s^2\beta_3 + p\alpha_3 + s(\alpha_4+\beta_4) + \alpha_5 = 0 \\ 3)\ p^2\beta_2 + ps\beta_3 + s^2\beta_4 + p\,(\alpha_4-\beta_4) + s\alpha_5 + \alpha_6 = 0 \end{cases}$$

und an Stelle der Matrix T' die fünf Gleichungen

$$(T)\quad \begin{cases} 1)\ \alpha_3p^2 + 2\alpha_5p + 2s\,(p\alpha_4+\alpha_6) + \alpha_5s^2 = 0 \\ 2)\ \alpha_2p^2 + 2\beta_4p - \alpha_6 + 2p\beta_3s + \beta_4s^2 = 0 \\ 3)\ \alpha_1p^2 - \alpha_5 + 2(\beta_2p-\beta_4)s = 0 \\ 4)\ \alpha_0p^2 - 2\beta_2p - \alpha_4 - 2\beta_3s - \beta_2s^2 = 0 \\ 5)\ \alpha_3 + 2\alpha_1p + 2(p\alpha_0+\alpha_2)\,s + \alpha_1s^2 = 0 \end{cases}$$

5) Aus diesen beiden Systemen (D) und (T) ergeben sich nun unmittelbar die Bedingungen für das Auftreten einer Spitze oder eines Undulationspunktes; denn da in der Spitze die zwei Doppelpunktsparameter zusammenfallen, so hat man im Systeme D nur $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ zu setzen. Die Resultante aus irgend zweien der drei Gleichungen (D) liefert den *Cuspidalfaktor* der Discriminante der Wendepunktsform, d. i. jenen Faktor, dessen Verschwinden das Auftreten einer Spitze kundgibt; er sei

$$C\,(\alpha_i\beta_i) = 0.$$

Setzt man ebenso im Systeme T die Parameter $\mu = \nu = \lambda$, drückt man also aus, dafs die zwei Berührpunkte einer Doppeltangente zusammenfallen, so kann man wiederum durch die Elimination von λ aus zweien der fünf Gleichungen die Bedingung aufstellen für das Vorhandensein eines Undulationspunktes; die so entstehende Relation:

$$U\,(\alpha_i\,\beta_i) = 0$$

bildet den zweiten Faktor der Discriminante von $W(\lambda)$, den *Undulationsfaktor.*

Beide Bedingungen sind also lediglich Funktionen der dreigliedrigen Determinanten $\alpha_i\ \beta_i$, von welchen Gröfsen überhaupt auch $W = 0$, $D = 0$, und $T = 0$ einzig und allein abhängen. (Kombinanteneigenschaft.)

§ 2. Vereinfachung der Formen W, T, D, U, C durch spezielle Wahl des Koordinatendreieckes.

Legt man als Coordinatendreieck das Dreieck der Doppelpunkte zu Grunde*) oder dasjenige, welches von irgend dreien der vier Doppeltangenten gebildet wird, so lassen sich alle im § 1 aufgestellten Relationen wesentlich vereinfachen. Ich wähle das Dreieck der Doppeltangenten.

Die drei quadratischen Gleichungen:

$$f_1 = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$
$$f_2 = \lambda^2 + c\lambda + d = 0$$
$$f_3 = \lambda^2 + e\lambda + f = 0$$

mögen durch ihre Wurzelwerte die drei Parameterpaare darstellen, welche den Berührungspunkten der drei als Koordinatendreieck gewählten Doppeltangenten zukommen. Dann ist die Gleichung der auf dieses Dreieck bezogenen C^4 notwendig gegeben durch:

$$\rho x_1 = f_1^2,\ \rho x_2 = f_2^2,\ \rho x_3 = f_3^2.$$

Nimmt man nun überdies an, dafs f_3 die Wurzeln $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$ habe, dann ist:

$$\rho x_3 = \lambda^2$$

Bildet man aber jetzt die dreigliedrigen Determinanten α_i β_i so zeigt sich, dafs vier derselben identisch verschwinden; man erhält:

$$\alpha_1 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = 0$$

die Folge davon ist, dafs auch die Formen W, D, T, U, C nur mehr von den übrigen sechs Determinanten abhängen, zwischen denen noch zwei Relationen bestehen. (Vergl. § 1, (2.))

Aus dieser Forderung für f_3 geht nun, wie wir später sehen werden, zwar keine Beschränkung für die Realitätsverhältnisse von Wende- und Doppelpunkten hervor, wohl aber von Doppeltangenten.

Sie schliefst die Typen mit vier imaginären Doppeltangenten aus. Um auch diese zu studieren, werden wir nicht einer der Formen f_i, sondern einer ihrer sechs Jacobischen Determinanten ϑ_{ik} die Wurzeln 0 und ∞ zuordnen.

Weil nun aber hierdurch die Wurzeln der beiden zugehörigen Formen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ harmonisch getrennt werden,**) so mufs

*) Diese Wahl wurde von H. Prof. Brill getroffen in seiner Abhandlung über die C^4 Mathem. Ann. B. XII.

**) Vergl. Clebsch „binäre Formen“ Seite 193.

die Summe der Wurzeln von f_1 sowohl als von f_2 gleich null sein; diese beiden Gleichungen haben also die Form

$$f_1 \equiv \lambda^2 + b = 0,\ f_2 \equiv \lambda^2 + d = 0.$$

Nimmt man hiezu noch eine beliebige dritte Doppeltangente, deren Berührpunkte durch die Form

$$f_3 \equiv \lambda^2 + e\lambda + f = 0$$

gegeben sind, als dritte Seite des Koordinatendreieckes, dann ist die Gleichung der Kurve:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= (\lambda^2 + b)^2 \\ \rho x_2 &= (\lambda^2 + d)^2 \\ \rho x_3 &= (\lambda^2 + e\lambda + f)^2 \end{aligned}$$

Von den dreigliedrigen Determinanten *verschwinden nun drei*, nämlich

$$\alpha_1\ \alpha_3 \text{ und } \alpha_5$$

Zugleich ist keine weitere Voraussetzung gemacht, als daſs die zwei Paar Berührpunkte zweier Doppeltangenten harmonisch liegen sollen mit den Punkten 0 und ∞.

Diese Bedingung schlieſst aber weder reelle noch isolierte noch konjugiert imaginäre Doppeltangentenpaare aus.

Mag man also für die Berührpunkte einer Doppeltangente oder für die Funktionaldeterminante zweier Formen f_i die Werte 0 und ∞ adjungieren immer ist:

$$\alpha_1 = \alpha_5 = 0.$$

Dazu tritt im ersten Falle $\beta_2 = \beta_4 = 0$, im zweiten: $\alpha_3 = 0$.

Umgekehrt: setzt man a priori $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$ dann folgt wegen der fünf Identitäten stets entweder

$$\beta_2 = \beta_4 = 0 \text{ oder } \alpha_3 = 0,$$

und in Folge dessen hat entweder eine Form f_i oder eine der Funktionaldeterminanten die Wurzeln 0 und ∞.

§ 3. Die fünf Kurventypen einer Wendepunktsgleichung.

Die Wendepunktsgleichung, wie sie in § 1 aufgestellt wurde, ist vom 6ten Grade in λ. Man kann nun eine beliebige Gleichung 6ten Grades

$$F \equiv b_0\lambda^6 + 3b_1\lambda^5 + 3b_2\lambda^4 + b_3\lambda^3 + 3b_4\lambda^2 + 3b_5\lambda + b_6 = 0$$

als Wendepunktsgleichung auffassen. Die Kurven C^4, deren Wendepunktsparameter Wurzeln dieser Gleichung sind, erhält man, wenn man die Koefficienten von $F = 0$, mit denen von $W = 0$ vergleicht und so die Werte der α_i β_i zu bestimmen sucht; denn diese Gröſsen allein bestimmen den Kurvencharakter, wie aus § 1 erhellt.

Diese Komparation liefert zunächst die sieben Gleichungen:

$$b_0 = \alpha_0,\ b_2 = \alpha_2 + 2\beta_2,\ b_1 = \alpha_1,$$
$$b_6 = \alpha_6,\ b_3 = \alpha_3 + 8\beta_3,\ b_5 = \alpha_5,$$
$$b_4 = \alpha_4 + 2\beta_4.$$

Da aber hiezu noch die drei unabhängigen Identitäten zwischen den Gröfsen α_i β_i treten, so erhält man gerade zehn Gleichungen für diese zehn Determinanten, welche sich also alle bis auf eine, etwa α_3, eliminieren lassen. Diese Eliminationsgleichung ist in α_3 vom *5ten Grade.*

Wir werden sehen, dafs sich zu jeder der fünf Wurzeln α_3 ein und nur ein Wertsystem der neun übrigen Determinanten α_i β_i bestimmen läfst.

Jedes dieser Wertsysteme, in die Gleichungen D und T, C und U eingeführt, bewirkt im allgemeinen immer *andere* Realitätsverhältnisse der Wurzeln von D und T einerseits, und andere Werte der Invarianten C und U andererseits. Überdies sind diese fünf Werte von C und U einzeln im allgemeinen irrational, und nur ihr Produkt ist rational und konstant, wegen der Relation

$$C_k \cdot U_k = \rho \cdot \Delta = const.$$

Denn der Wert dieser Discriminante bleibt notwendig für alle fünf Wertsysteme unverändert, weil die Substitution der fünf Reihen α_i β_i in $W(\lambda) = 0$ stets wieder zur nämlichen Ausgangsgleichung $F = 0$ führen mufs, aus der die fünf Wertsysteme durch Komparation mit $W(\lambda) = 0$ gewonnen wurden.

Es gibt also gerade fünf Kurventypen, welche ein und dieselbe Gleichung 6ten Grades als Wendepunktsgleichung haben.)*

Man kann nun aber, wie die Betrachtungen des § 2 zeigen, die Kurve C^4 stets auf ein Koordinatendreieck so beziehen, dafs $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$ ist, also auch die Wendepunktsform sich stets durch eine Gleichung 6ten Grades gegeben denken, in der das 2te und vorletzte Glied fehlen, d. h. in der Form

$$\text{(III)}\quad F \equiv b_0\lambda^6 + 3b_2\lambda^4 + b_3\lambda^3 + 3b_4\lambda^2 + b_6 = 0$$

In diesem Falle ist aber auch entweder $\beta_2 = \beta_4 = 0$ oder $\alpha_3 = 0$. Die Gleichung 5ten Grades für α_3 reduziert sich alsdann auf

$$\alpha_3^3 \cdot (\alpha_3^2 - \alpha_3 b_3 + 8\,(b_2 b_4 - b_0 b_6)) = 0 \cdot \cdot \cdot \text{(I)}$$

und diese Gleichung lehrt, dafs in *dreien* der fünf Wertsysteme neben $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$ auch $\alpha_3 = 0$ und in den *zwei* andern neben $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$ auch $\beta_2 = \beta_4 = 0$ auftritt. Im ersten Falle bestimmt sich

*) Den ausführlichen Beweis dieses Satzes findet man in rein algebraischer Form, Brill, Annal. B. XX. „Über bin. Formen u. die allgem. Gleich. 6ten Grades.“

zu jeder der drei Wurzeln $\alpha_3 = 0$ die Gröfse α_4 aus der kubischen Gleichung

$$\alpha_4^3 + b_4\alpha_4^2 - b_6 b_2 \alpha_4 - b_0 b_6^2 = 0 \text{ (II)}$$

die übrigen linear aus α_4 und α_3.

Im zweiten Falle bestimmen sich alle andern Determinanten *linear* aus den zwei Wurzeln α_3 des quadratischen Faktors in der Gleichung (I).

Man kann nun stets in F die Koefficienten der 6ten und 0ten Potenz der Einheit gleich setzen, so dafs also

$$\alpha_0 = \alpha_6 = b_0 = b_6 = 1 \text{ und demnach}$$
$$F' \equiv \lambda^6 + 3b_2\lambda^4 + b_3\lambda^3 + 3b_4\lambda^2 + 1 = 0.$$

Diese *letzte* Festsetzung hat auf die Allgemeinheit der Wendepunktsform (III) wenigstens noch keinen Einflufs, da sie ja einer linearen Transformation gleichkommt.

Nur die Doppelpunkts- und Doppeltangentengleichungen erleiden hiedurch eine gewisse Beschränkung, weil ja diese Formen keine Kovarianten von $W(\lambda) = 0$ sind.

Doch soll diese Beschränkung nur eine zeitweilige sein; wir werden im zweiten Teile ohne Mühe die für sie gültigen Resultate für den Fall $\alpha_0 = \alpha_6 \gtrless 1$ verallgemeinern.

Zu dieser Gleichung 6ten Grades $F' = 0$ gehören noch immer im allgemeinen fünf verschiedene Kurventypen; bei zweien derselben sind die zugehörigen Formen D, T, U, C nur mehr abhängig von den Determinanten:

$$\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \beta_3;$$

es sei dies die *erste Gruppe* der Kurven; bei den drei andern, den Kurven der *zweiten Gruppe*, gehen in die Formen $D\ T\ U$ und C nur mehr die Determinanten ein

$$\alpha_2\ \alpha_4\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4.$$

Weil aber (neben $\alpha_1 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = 0$, $\alpha_0 = \alpha_6 = 1$) noch die Identität (III), 2 (§ 1) besteht:

$$\alpha_3\beta_3 - \alpha_2\alpha_4 + 1 = 0$$

so kann man in den Gleichungen der *ersten* Gruppe auch noch α_3 eliminieren; und weil ferner neben $\alpha_1 = \alpha_5 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_0 = \alpha_6 = 1$ noch zwei Identitäten aufrecht erhalten bleiben:

$$\alpha_2\beta_2 + \beta_4 = 0,\ \alpha_4\beta_4 + \beta_2 = 0,$$

so läfst sich in den Gleichungen der zweiten Gruppe auch noch α_4 und β_2 durch die drei andern Determinanten α_2, β_3, β_4 ausdrücken.

Die Gleichungen der fünf Kurventypen einer Wendepunktsform,

werden dadurch nur mehr von drei willkürlichen Gröfsen abhängig; insbesondere hat man für die *erste* Gruppe der Kurven die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} C_1\,(\alpha_2\alpha_4\beta_3) &= 0, \quad U_1\,(\alpha_2\alpha_4\beta_3) = 0 \\ W_1\,(\lambda) &= \lambda^6 + 3\alpha_2\lambda^4 + \frac{1}{\beta_3}\Big(8\beta_3 + (\alpha_2\alpha_4 - 1)\Big)\lambda^3 + 3\alpha_4\lambda^2 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} A$$

und für die zweite Gruppe die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} C_2\,(\alpha_2\beta_3\beta_4) &= 0, \quad U_2\,(\alpha_2\beta_3\beta_4) = 0 \\ W_2\,(\lambda) &= \lambda^6 + 3\Big(\frac{\alpha_2^2 - 2\beta_4}{\alpha_2}\Big)\lambda^4 + 8\beta_3\lambda^3 + 3\Big(\frac{1+\alpha_2\beta_4}{\alpha_2}\Big)\lambda^2 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} B$$

Variiert man nun die Konstanten $b_2\, b_3\, b_4$ von F', dann werden auch jedesmal die zugehörigen fünf Wertsysteme immer andere und andere. Alle Determinanten der zwei Wertsysteme der ersten Gruppe sind teils gleich null, teils ausdrückbar durch $\alpha_2\,\alpha_4\,\beta_3$. Deutet man also $\alpha_2\,\alpha_4\,\beta_3$ als Punktkoordinaten, dann repräsentiert jeder Punkt des Raumes ein solches Wertsystem. Deutet man in der zweiten Gruppe ebenso $\alpha_2\,\beta_3\,\beta_4$ als Punktkoordinaten eines zweiten Raumes, dann repräsentiert jeder Punkt dieses Raumes ein Wertsystem der zweiten Gruppe, so dafs also alle fünf Wertsysteme, auf welche eine vorgegebene Wendepunktgleichung führt, durch zwei Punkte eines ersten Raumes R_1 und durch drei Punkte eines zweiten Raumes R_2 dargestellt sind. Ich setze

$$\begin{aligned} &\text{im Raume } R_1\text{:}\quad \alpha_2 = x, \quad \alpha_4 = z, \quad 4\beta_3 = y; \\ &\text{im Raume } R_2\text{:}\quad \alpha_2 = \xi, \quad \beta_4 = \zeta, \quad 4\beta_3 = \eta. \end{aligned}$$

Die Faktoren C und U der Discriminante Δ, können nun als Flächen gedeutet werden; sie bilden die Cuspidal- resp. die Undulationsflächen:

$$\begin{aligned} C_1\,(xyz) &= 0, \quad U_1\,(xyz) = 0 \\ C_2\,(\xi\eta\zeta) &= 0, \quad U_2\,(\xi\eta\zeta) = 0 \end{aligned}$$

des Raumes R_1, resp. R_2. Die zu beiden Räumen gehörigen Wendepunktsformen werden:

$$\left.\begin{aligned} W_1\,(xyz\lambda) &= \lambda^6 + 3x\lambda^4 + \frac{2}{y}\Big(y^2 + 2\,(xz - 1)\Big)\lambda^3 + 3z\lambda^2 + 1 = 0 \\ W_2\,(\xi\eta\zeta\lambda) &= \lambda^6 + 3\Big(\frac{\xi^2 - 2\zeta}{\xi}\Big)\lambda^4 + 2\eta\lambda^3 + 3\Big(\frac{1+\xi\zeta}{\xi}\Big)\lambda^2 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} E$$

Fünf Punkte, den beiden Räumen entnommen, sind immer einander zugeordnet; davon liegen zwei Punkte im Raume R_1 und drei im Raume R_2. Geht man von einem Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ des ersten Raumes aus, so liefert dessen Substitution in $W\,(xyz) = 0$ eine numerische Gleichung $F_1 = 0$; die Komparation der Gleichung mit

$W(\lambda \alpha_i \beta_i) = 0$ führt auf dem angegebenen Wege zu den vier übrigen Punkten.

Wählt man insbesondere einen Punkt auf einer der Flächen $C = 0$, $U = 0$, also ein Wertsystem, das die Discriminante der Wendepunktsform verschwinden macht, dann müssen alle fünf Wertsysteme die nämliche Eigenschaft haben, d. h. *auch die vier anderen Punkte liegen auf den Flächen.*

§ 4. Transformationsgleichungen.

Die fünf Punkte sind nicht nur im allgemeinen einander zugeordnet, sondern es stehen auch die zwei des Raumes R_1, sowie die drei des Raumes R_2 unter sich in Korrespondenz. Dieser § soll die Beziehungen der Punkte jeder Gruppe fest legen.

1) Es sei im Raume R_1 ein Punkt $x_1 y_1 z_1$ gewählt, also ein Wertsystem $\alpha_i \beta_i$ gegeben, in welchem aufser $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$ $\alpha_0 = \alpha_6 = 1$ insbesondere $\beta_2 = \beta_4 = 0$ auftreten. Sein entsprechender Punkt sei $x_2 y_2 z_2$. Da beide Punkte in $W(\lambda xyz) = 0$ substituiert, dieselben numerischen Koefficienten erzeugen müssen, wenn sie einander entsprechen sollen, also für alle Werte von λ die Gleichheit:

$$W(\lambda x_1 y_1 z_1) \equiv W(\lambda x_2 y_2 z_2)$$

bestehen mufs, so hat man sofort die Relationen:

1) $x_1 = x_2$
2) $z_1 = z_2$
3) $\dfrac{y_1^2 + 2(x_1 z_1 - 1)}{y_1} = \dfrac{y_2^2 + 2(x_2 z_2 - 1)}{y_2}$

Aus der 3ten Gleichung folgt in Verbindung mit 1) und 2)

$$y_1 y_2 (y_1 - y_2) = 2 (x_2 z_2 - 1)(y_1 - y_2)$$

Entfernt man die selbstverständliche Lösung

$$y_1 = y_2, \ (x_1 = x_2, \ z_1 = z_2)$$

dann ist also die Beziehung der beiden Punkte des Raumes R_1 durch die drei Transformationsgleichungen gegeben:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ z_1 = z_2 \\ y_1 = 2 \dfrac{(x_2 z_2 - 1)}{y_2} \end{cases}$$

Diese Transformation des Raumes R_1 in sich ist eine birationale; insbesondere ist zu bemerken, dafs gemäfs der am Schlusse des letzten § gemachten Bemerkung die beiden Flächen $U_1 = 0$ und $C_1 = 0$ dieses Raumes durch diese Transformation in einander übergehen müssen. Diese Flächen sind Punkt um Punkt eindeutig auf einander bezogen.

Von dem eindeutigen Entsprechen der Punkte dieses Raumes machen nur die Punkte der Cylinderfläche

$$J_1 \equiv (xz - 1) = 0$$

eine Ausnahme, insoferne, als *allen* Punkten einer Erzeugenden dieser Fläche, immer der Schnittpunkt dieser Erzeugenden mit der Ebene $y = 0$ entspricht.

Diese Fläche ist eben die Jacobische Fläche, und die Kurve $y = 0$, $xz - 1 = 0$ die Fundamentalkurve des Raumes R_1.*)

2) Sind nun die Punkte $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$, $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$ jene drei Punkte des Raumes R_2, welche den Punkten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ in R_1 entsprechen, dann mufs ebenso stattfinden:

$$W(\lambda \xi_1 \eta_1 \zeta_1) \equiv etc \equiv W(\lambda x_1 y_1 z_1) \equiv etc.$$

Die Komparation der einzelnen Koefficienten, abgesehen von den Indices der Koordinaten, gibt:

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1)\ x = \dfrac{\xi^2 - 2\zeta}{\xi} \\ 2)\ z = \dfrac{1 + 2\zeta\xi}{\xi} \\ 3)\ \dfrac{y^2 + 2(xz - 1)}{y} = \eta, \text{ oder } y^2 - y\eta = \dfrac{4\zeta}{\xi^2}(1 + 2\xi\zeta - \xi^3) \end{array} \right.$$

Durch diese drei Relationen stehen beide Räume in Beziehung und sie gehen durch Anwendung dieser Transformation ineinander über. Eliminiert aus 1) und 2) die Variable ζ und nimmt die Eliminationsgleichung als erste Transformationsformel, dann ist die Korrespondenz beider Räume gegeben durch:

$$\left. \begin{array}{ll} 1)\ \xi^3 - x\xi^2 - z\xi + 1 & = 0 \\ 2)\ y\eta - (y^2 + 2(xz - 1)) & = 0 \\ 3)\ 2\xi\zeta - z\xi + 1 & = 0 \end{array} \right\} \text{(II')}$$

Aus der ersten Gleichung erkennt man sofort, dafs einem Punkte xyz drei Punkte entsprechen, mit drei *verschiedenen* Ordinaten $\xi_1 \xi_2 \xi_3$; hiezu liefert 3) die Ordinaten ζ, während die Ordinaten η für alle drei Punkte die nämlichen sind.

3) Aus den Gleichungen (II') kann man leicht die Beziehungen ableiten, die zwischen den Punkten des Raumes R_2 allein existieren.

Sei nämlich $\xi_1 \zeta_1 \eta_1$ einer der drei Punkte, die dem gegebenen Punkte xyz entsprechen, dann folgt wegen (II)

*) Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes B. II. Nr. 440 u. 441.

$$x = \frac{\xi_1^{\,2} - 2\zeta_1}{\xi_1}$$

$$z = \frac{1 + 2\,\xi_1\,\zeta_1}{\xi_1}$$

Setze ich also diese Werte von x und z in die Gleichung 1) des Systemes (II) ein, so kommt:

$$\xi^3 - \frac{\xi_1^2 - 2\zeta_1}{\xi_1} \cdot \xi^2 - \frac{1 + 2\xi_1\zeta_1}{\xi_1} \cdot \xi + 1 = 0$$

und $\xi = \xi_1$ ist notwendig eine Wurzel dieser Gleichung. Die Entfernung dieses Faktors gibt:

$$(\alpha) \qquad \xi_1\xi^2 + 2\zeta_1\xi - 1 = 0,$$

eine Gleichung, welche durch ihre beiden Wurzeln ξ_2 und ξ_3 offenbar die Abscissen der zwei Punkte liefert, die einem gegebenen Punkte $\xi_1\,\zeta_1\,\eta_1$ entsprechen, und zwar ausgedrückt gerade in den Koordinaten $\xi_1\,\zeta_1$ des gegebenen Punktes.

Eliminiert man ferner aus Gleichung (α) und der dritten des Systemes (II′), in der man zuvor z durch $(1 + 2\xi_1\zeta_1) : \xi_1$ ersetzt hat, die Gröfse ξ, so erhält man als Beziehung zwischen den drei Ordinaten ζ die Gleichung:

$$(\beta) \quad 4\xi_1^2\zeta^2 - 4\xi_1\,(1 + \zeta_1\xi_1)\,\zeta + (1 + 2\xi_1\zeta_1 - \xi_1^3) = 0.$$

Die Transformationsformeln, durch welche der Raum R_2 in sich selbst übergeht, lauten daher (weil die drei η-Koordinaten dreier entsprechender Punkte die nämlichen sind):

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} 1)\ \xi_1\xi^2 + 2\zeta_1\xi - 1 = 0 \\ 2)\ 4\xi_1^2\zeta^2 - 4\xi_1\,(1 + \xi_1\zeta_1)\,\zeta + (1 + 2\,\xi_1\zeta_1 - \xi^3{}_1) = 0 \\ 3)\ \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 \text{ oder } (\eta - \eta_1)^{\,3} = 0 \end{cases}$$

Bevor ich nun diese drei Transformationen einer näheren Betrachtung unterziehe, gehe ich dazu über, die Flächenpaare beider Räume aufzustellen und zu diskutieren.

§ 5. Die Gleichungen der Cuspidal- und Undulationsfläche jedes Raumes.

Die am Schlusse des § 3 erwähnten Flächen sind das geometrische Bild jener algebraischen Bedingungen, die das Auftreten einer Spitze oder eines Undulationspunktes erfordert. Man kann nach der am Schlusse des § 1 besprochenen Methode diese beiden Bedingungen ganz allgemein aufstellen. Ich werde zunächst diesen Weg einschlagen. Auf eine andere Methode, die zugleich noch weitere für

die Kurvendiscussion wichtige Flächen liefert, mache ich später aufmerksam. (II. Teil, § 15.)

I. *Die Undulationsfläche des Raumes* R_1. Ich wähle aus dem Systeme (T) § 1 die beiden Gleichungen 2 und 4; sie liefern die vier Parameterpaare μ, ν der Doppeltangenten. Setzt man in ihnen $\mu = \nu = \lambda$, was nichts anderes heifst, als dafs die Berührpunkte der Doppeltangenten zusammenfallen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2\lambda^4 + 4\beta_3\lambda^3 + 6\beta_4\lambda^2 - \alpha_6 &= 0 \\ \alpha_0\lambda^4 - 6\beta_2\lambda^3 - 4\beta_3\lambda - \alpha_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Die Elimination von λ aus diesen beiden Gleichungen nach der Methode von Bézout liefert die Bedingung für das Auftreten eines Undulationspunktes. Führt man die Elimination aus, setzt hierauf in der Eliminationsdeterminante

$$\alpha_0 = \alpha_6 = 1$$
$$\alpha_1 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = 0$$

und ersetzt α_3 vermöge der Identität (III) 2 § 1 durch

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2\alpha_4 - 1}{\beta_3}$$

so erhält man unter Einführung der Koordinatenbezeichnung

$$4\beta_3 = y,\ \alpha_2 = x,\ \alpha_4 = z$$

bei geeigneter Zusammenfassung:

$$U_1 \equiv y^6 + y^4(xz - 3 + x^3 + z^3) + (xz-1)^2(3+xz)y^2 - (xz-1)^4 = 0$$

als Gleichung der Undulationsfläche des Raumes R_1.

II. *Die Cuspidalfläche des Raumes* R_1. Aus dem System der Doppelpunktsgleichungen $(D, \S\ 1)$ wähle ich die Gleichungen 1 und 3, und setze in ihnen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; d. h. ich lasse die Parameterwerte des Doppelpunktes zusammenfallen, wie es das Auftreten einer Spitze verlangt, dann erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0\lambda^4 + 2\alpha_1\lambda^3 + (\alpha_2 + 3\beta_2)\lambda^2 + 2\beta_3\lambda + \beta_4 &= 0 \\ \beta_2\lambda^4 + 2\beta_3\lambda^3 + (\alpha_4 + 3\beta_4)\lambda^2 + 2\alpha_5\lambda + \alpha_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichungen verlangt wieder das Verschwinden der Resultante beider Formen; das obige Verfahren zur Herstellung dieser Resultante liefert die Gleichung:

$$C_1 \equiv 4(4x^2 + zy^2)(4z^2 + xy^2) + (4 - y^2)^3 - 16xz(8 - y^2) = 0,$$

oder indem man diesen Ausdruck nach Potenzen von y anordnet:

$$C_1 \equiv y^6 - 4y^4(xz + 3) - 16y^2(x^3 + z^3 - 3 + xz) - 64(xz - 1)^2 = 0$$

Das Produkt der beiden Ausdrücke U_1 und C_1 bildet bis auf einen Zahlenfaktor die Discriminante im Raume R_1.

III. Zur Aufstellung der Flächengleichungen des zweiten Raumes benützte ich nicht die nämlichen Doppelpunkts- und Doppeltangentenformen wie vorhin, sondern andere, welche eine einfachere Entwicklung der komplizierten Determinanten C_2 und U_2 gestatten.

Die Undulationsfläche entwickeln wir aus den Gleichungen ((*T*) 2 und 5, § 1).

Wir erhalten zunächst die Determinante:

$$U_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + \beta_2 & 4\beta_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & 4\beta_3 & \alpha_4 + 6\beta_4 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot (4 \cdot \alpha_2)^4$$

Die Elimination von β_2 und α_4 mit Hilfe der Identitäten

$$\alpha_2 \beta_2 = -\beta_4$$
$$\alpha_2 \alpha_4 = 1$$

und die Einführung der Koordinatenbezeichnung

$$\alpha_2 = \xi,\ \beta_4 = \zeta,\ 4\beta_3 = \eta$$

liefert nach geeigneter Umformung, von dem Faktor 256 abgesehen, die sehr einfache Flächengleichung:

$$U_2 \equiv \{\eta^2 \xi^3 + (\xi^3 - 6\xi\zeta - 1)^2\} \cdot \xi = 0$$

IV. Komplizierter wird die Entwicklung der Cuspidalfläche dieses Raumes. Die Ausgangsgleichungen waren die beiden Doppelpunktsformen ((*D*) 1, 2 § 1):

$$C \begin{cases} \alpha_0 \lambda^4 + 2\alpha_1 \lambda^3 + (\alpha_2 + 3\beta_2)\lambda^2 + 2\beta_3 \lambda + \beta_4 = 0 \\ \alpha_1 \lambda^4 + 2(\alpha_2 + \beta_2)\lambda^3 + (\alpha_3 + 4\beta_3)\lambda^2 + 2(\alpha_4 + \beta_4)\lambda + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Setzt man hier a priori

$$\alpha_1 = \alpha_5 = \alpha_3 = 0,\ \alpha_0 = \alpha_6 = 1$$

und eliminiert nun aus den so sich ergebenden Gleichungen 4ten und 2ten Grades den Parameter λ, dann erhält man zunächst die Determinante

$$C \equiv \begin{Vmatrix} 0 & 2(\alpha_2 + \beta_2) & 4\beta_3 & 2(\alpha_4 + \beta_4) \\ 2(\alpha_2 + \beta_2) & 4\beta_3 & 2(\alpha_4 + \beta_4) & 0 \\ 4\beta_3 & 2(\alpha_4 + \beta_4) & 8\beta_3\beta_2 & P \\ 2(\alpha_4 + \beta_4) & 0 & P & 4\beta_3\alpha_4 \end{Vmatrix}$$

wobei $P = 2(\alpha_4 + \beta_4)(\alpha_2 + 3\beta_2) - 2\beta_4(\alpha_2 + \beta_2)$

Die Entwicklung dieser Determinante liefert unter Benützung der erwähnten Koordinatenbezeichnung nach einigen Umformungen die Flächengleichung:

$$C_2 \equiv \xi \left(\eta^4 \xi^5 + 8\eta^2 \left(\zeta (1 - \xi^3)(3\xi - \zeta^2) - 2\xi^2 (\xi - 3\zeta^2)\right) \xi^2 - 16 \left((1 - \xi^3)(\xi - 3\zeta^2) + 2\xi\zeta (3\xi - \xi^2)\right)^2\right) = 0$$

Diese Gleichung werde ich später auf eine elegantere Form bringen.

Die Diskussion der eben aufgestellten vier Flächen werde ich nicht in den Einzelheiten vorführen und insbesondere absehen von derjenigen der einzelnen ebenen Schnitte; ich beschränke mich vielmehr auf die Ableitung der Doppel- und mehrfachen Kurven, sowie der etwaigen Rückkehrkanten und auf die Besprechung des reellen oder isolierten Verlaufes der ersten und füge zum Schlusse nur eine Erklärung der beigegebenen Flächenbilder hinzu. Zunächst aber gebe ich den Beweis eines Hilfssatzes, der mir bei der Aufstellung der Doppelkurven wesentliche Dienste leistete.

§ 6. Die Discriminante reciproker Gleichungen vom Grade 2n.

Jede reciproke Gleichung

1) $$f(x) = 0$$

vom Grade $2n$, läfst sich bekanntlich auf eine Gleichung vom Grade n

2) $$\varphi(y) = 0$$

reduzieren, deren Wurzeln η_k mit denen von $f(x)$ durch die Relation zusammenhängen:

3) $$\xi^2 - \eta_k \xi + 1 = 0.$$

Besitzt $\varphi(y) = 0$ zwei gleiche Wurzeln, so fallen auch in $f(x)$ Wurzeln zusammen, und daraus erhellt, dafs die Discriminante von $\varphi(y) = 0$ jedenfalls Faktor der Discriminante von $f(x) = 0$ ist. Die Gleichung 3) erhält aber auch zwei gleiche Wurzeln, wenn $\eta_k = \pm 2$ ist; eine Bedingung also dafür, dafs $f(x) = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat, ist, dafs $\eta_k = \pm 2$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi(y) = 0$ ist; es mufs also auch das Substitutionsresultat von ± 2 in $\varphi(y)$ Faktor der Discriminante von $f(x)$ sein. Nun ist die Discriminante einer Gleichung vom Grade $2n$ in den Koefficienten von der Dimension $2(2n - 1)$, und die einer Gleichung n^{ten} Grades von der Dimension $2(n - 1)$.

Die Substitutionsresultate $\varphi(\pm 2)$ sind linear in den Koefficenten. Der andere Factor der Discriminante, welcher nach Division mit der Discriminante von $\varphi(y) = 0$ und den linearen Faktoren $\varphi(+2)\ \varphi(-2)$ noch übrig bleibt, hat also noch die Dimension:

$$2\,(2n-1) - \{2\,(n-1)+2\} = 2\,(n-1),$$

so dafs die Vermutung nahe liegt, dieser Faktor ist abermals die Discriminante von $\varphi(y) = 0$, welche somit quadratisch in die Discriminante $f(x) = 0$ eingeht.

Dies ist nun zu beweisen.

Aus der Gleichung 3) folgt:

$$2\,\xi_{2k-1} = \eta_k + \sqrt{\eta^2{}_k - 4}$$
$$2\,\xi_{2k} = \eta_k - \sqrt{\eta^2{}_k - 4}$$

Ich substituiere diese Werte von ξ in die Discriminante

$$\Delta \equiv \Pi\,(\xi_1 - \xi_2)^2$$

deren Wurzeldifferenzen ich in zwei Gruppen teile: Die erste Gruppe ist:

$$(\xi_1 - \xi_2)^2\,(\xi_3 - \xi_4)^2 \cdots\cdots (\xi_{2n-1} - \xi_{2n}) = \Pi_1\,(\xi_{2k-1} - \xi_{2k})^2$$

Weil aber

$$\xi_{2k-1} - \xi_k = \sqrt{\eta^2{}_k - 4}$$

so folgt

$$\Pi_1\,(\xi_{2k-1} - \xi_{2k})^2 = \Pi_1\,(\eta^2{}_k - 4) = \Pi_1\,(\eta_k + 2)\,\Pi_1(\eta_k - 2)$$
$$= \varphi\,(+2)\,\varphi\,(-2).$$

Die zweite Gruppe enthält Wurzeldifferenzen von der Form

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_{2k-1} - \xi_{2i-1}, & \xi_{2k-1} - \xi_{2i} \\ \xi_{2k} - \xi_{2i}, & \xi_{2k} - \xi_{2i-1} \end{array}\right\} i > k$$

und zwar an Zahl

$$\frac{2n\,(2n-1)}{2} - n = 4n\,(n-1),$$

also eine Anzahl, die durch *vier* teilbar ist.

Betrachtet man nun eine solche Untergruppe:

$(\xi_{2k-1} - \xi_{2i-1})\,(\xi_{2k-1} - \xi_{2i})\,(\xi_{2k} - \xi_{2i-1})\,(\xi_{2k} - \xi_{2i})$,

dann erhält man aus den beiden ersten Faktoren durch die oben erwähnte Substitution:

$$2\,(\eta_k - \eta_i)\,\{\eta_k + \sqrt{\eta^2{}_k - 4}\}$$

und ebenso führen die zwei anderen Faktoren auf

$$2\,(\eta_k - \eta_i)\,\{\eta_k - \sqrt{\eta^2{}_k - 4}\}$$

Das Produkt beider ist also

$$= 16\,(\eta_k - \eta_i)^2$$

Nun hat man aber

$$\frac{4n\,(n-1)}{4} = n\,(n-1)$$

Gruppen von je 4 solchen Faktoren; folglich ist:

$$\Pi_2 (\xi_{2k} - \xi_{2i}) (\xi_{2k-1} - \xi_{2i-1}) (\xi_{2k-1} - \xi_{2i}) (\xi_{2k} - \xi_{2i-1}) = 16^{n(n-1)} \Pi_2 (\eta_k - \eta_i)^2$$

und daher die Discriminante

$$\Pi (\xi_\varrho - \xi_\mu)^2 = 16^{n(n-1)} \varphi (+2) \cdot \varphi (-2) \{\Pi (\eta_k - \eta_i)^2\}^2$$

§ 7. Diskussion des Flächenpaares im Raume R_1.

Als Gleichung der Cuspidal- und der Undulationsfläche wurde § 6 gefunden:

$$C_1 \equiv y^6 - 4y^4 (xz + 3) - 16y^2 (xz - 3 + x^3 + z^3) - 64 (xz - 1)^2 = 0$$
$$U_1 \equiv y^6 + y^4 (xz - 3 + x^3 + z^3) + y^2 (xz - 1)^2 (xz + 3) - (xz - 1)^4 = 0$$

Ihr Produkt ist die Discriminante der Wendepunktsgleichung

$$W(xyz\lambda) \equiv \lambda^6 + 3x\lambda^4 + \frac{2}{y}(y^2 + 2(xz - 1))\lambda^3 + 3z\lambda^3 + 1 = 0,$$

welche nach den Untersuchungen des § 2 den Punkten dieses Raumes zugeordnet ist.

Aufstellung der Doppelkurven. Aus den Gleichungen der Flächen A erhellt zunächst direkt, dafs die Hyperbel:

$$H_1 \equiv \begin{cases} xz - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Doppelkurve von C_1 und vierfache Kurve von U_1 ist. Jede der Flächen besitzt aber noch eine Doppelkurve, deren Gleichungen ich mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes aufstellen will.

Setzt man nämlich in $W(xyz\lambda) = 0$

$$x = z,$$

so wird diese Gleichung *reciprok;* ihre Discriminante zerfällt also in das Quadrat der Discriminante, welche die Gleichung 3ten Grades

$$\varphi(\rho) \equiv \rho^3 + 3(x - 1)\rho + \frac{2}{y}(y^2 + 2(x^2 - 1)) = 0$$
$$\equiv \rho^3 + p\rho + q = 0$$

besitzt, und in die Substitutionsresultate:

$$\varphi(+2) \equiv \frac{2}{y}(y(1 + 3x) + y^2 + 2(x^2 - 1))$$
$$\varphi(-2) \equiv \frac{2}{y}(y^2 + 2(x^2 - 1) - y(1 + 3x))$$

Die Discriminante von $\varphi(\rho)$ ist aber:

$$\Delta(\rho) \equiv \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \equiv \frac{1}{y^2}((x - 1)^3 y^2 + (y^2 + 2(x^2 - 1))^2)$$

Alle drei Faktoren aber $\Delta(\rho)$, $\varphi(+2)$, $\varphi(-2)$ lassen sich noch weiter zerfällen; man hat nämlich:

$$\text{(I)}\quad \Delta(\rho) \equiv \frac{1}{y^2}\left[y^4+y^2(x-1)\left((x+1)^2+4\right)+4(x-1)^2(x+1)^2\right]$$
$$\equiv \frac{1}{y^2}\left(y^2+4(x-1)\right)\left(y^2+(x-1)(x+1)^2\right) \equiv P_1 \cdot S_1 \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$\text{(II)}\quad \varphi(2) \equiv \frac{1}{y}\left(y+2(x+1)\right)\left(y+(x-1)\right) \equiv G_1 \cdot G_3 \cdot \frac{1}{y}$$

$$\text{(III)}\quad \varphi(-2) \equiv \frac{1}{y}\left(y-2(x+1)\right)\left(y-(x-1)\right) \equiv G_2 \cdot G_4 \cdot \frac{1}{y}$$

Der Schnitt der Ebene $x = z$ mit dem Flächenpaare der Discriminante zerfällt somit in die Faktoren:

$$\Delta(\lambda) \equiv 16^6 \cdot \frac{1}{y^6} \cdot P_1^{\,2} \cdot S_1^{\,2} \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 = 0$$

Entfernt man den Faktor $16^6 \frac{1}{y^6}$ dann bleiben noch 6 Kurven, in deren Gleichungen sich das Produkt

$$U_1^{x=z} \cdot C_1^{x=z} = 0$$

spalten lassen mufs. Dasselbe ist in der That vom 12ten Grade in y und x, und ein einfaches Zahlenexempel lehrt, dafs

$$P_1^{\,2} \cdot G_1 \cdot G_2 \equiv C_1^{x=z} = 0,$$
$$S_1^{\,2} \cdot G_3 \cdot G_4 \equiv U_1^{x=z} = 0.$$

P_1 und S_1 sind somit die Projektionen zweier ebenen Doppelkurven, welche von der Ebene $x = z$ aus den Flächen $C_1 = 0$ und $U_1 = 0$ ausgeschnitten werden. Dieselbe Ebene schneidet überdies die Fäche C_1, wie die Fläche U_1 nach einem Geradenpaare; eine weitere Schnittkurve kann nicht mehr in der Ebene liegen. Die Projektion des Gesamtschnittes auf die Ebene $z = 0$ gewährt ein sehr übersichtliches Bild, das die Tafel I, Fig. 2 wiedergibt. Die punktierten Teile der Doppelkurven deuten darauf hin, dafs die betreffenden Stücke dort isoliert verlaufen. Einer weiteren Erläuterung wird das Bild nicht mehr bedürfen. Ich bemerke nur, vorausgreifend, dafs diese Ebene *alle* Zellen des Raumes R_1 trifft, soweit sie durch die Flächen C_1 und U_1 gebildet werden; es ist also die Zahl der ebenen Zellen genau gleich der Zahl der räumlichen Zellen.

Die Untersuchungen über den reellen und isolierten Verlauf der Doppelkurven H_1, P_1, S_1 lehren folgendes: *) Die Hyperbel

*) Das Prinzip der Methode für diese Untersuchungen beruht bekanntlich darauf, dafs man strebt zu erkennen, wie viele *reelle* Fortschreitungsrichtungen

verläuft auf der Cuspidalfläche nur für Punkte mit *negativen* x- und z-Koordinaten *reell*, während umgekehrt einzig und allein für *positive* x- und z-Koordinaten dieselbe reell der Undulationsfläche angehört; doch sind von den vier Mänteln der Fläche U_1, welche sich in H_1 treffen, nur zwei reell.

Die Kurven $P_1 = 0$ und $S_1 = 0$ sind reell für alle Punkte, deren Ordinaten y zwischen $y = \pm\infty$ und $y = \pm 4$ gelegen sind, in welchen Punkten die beiden Kurven sich durchdringen; von hier ab verlaufen sie isoliert und insbesondere treffen diese isolierten Teile in den Punkten $y = 0$, $x = \pm 1$ die Hyperbel $H_1 = 0$.

Beide Flächen sind gestaltlich wenig von einander verschieden. Alle ebenen Schnitte $x = c_1$, $z = c_2$ nehmen sowohl für die Fläche $U_1 = 0$, als auch für die Fläche $C_1 = 0$, *nur zwei wesentlich* verschiedene Formen an, deren einer Typus durch den Schnitt $x = + c_1$

---

auf der Fläche für Punkte existieren, die den Punkten der Doppelkurve benachbart sind. Im Beispiel: die Hyperbel H_1 liegt in der Ebene $y = 0$; ich untersuche die Zahl der reellen Fortschreitungsrichtungen in den Punkten $y' = (y + 2\varepsilon)_{y=0} = 0$, $z' = z + \zeta$ längs der Kurve $xz - 1 = 0$. Zu dem Zwecke setzen wir zunächst:

$$y = (y + 2\varepsilon)_{y=0} = 0$$
$$z = z + \zeta$$

in die Fläche $C_1 = 0$ ein und erhalten:

$$\varepsilon^2\left((\varepsilon^2 - x(z+\zeta) - 3)\,\varepsilon^2 - (x^3 + (z+\zeta)^3 - 2)\right) = (x(z+\zeta) - 1)\,(\varepsilon^2 + x(z+\zeta) - 1)$$

Vernachlässigt man hierin alle Gröfsen, die von höherer Ordnung unendlich klein sind als ε^2 und ersetzt, weil wir uns ja nur auf Punkte längs der Kurve $xz - 1 = 0$ beschränken wollen, z durch $f(x) = \frac{1}{x}$, so kommt:

$$-\varepsilon^2\left(x^3 + \frac{1}{x^3} - 2\right) = x^2\,\zeta^2$$

$$\frac{\zeta}{\varepsilon} = \pm\frac{1}{x}\sqrt{2 - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$$

Die Funktion $x^3 + \frac{1}{x^3}$ hat ein Minimum $+2$ und ein Maximum -2; man erkennt $x = +1$ ist isolierter Doppelpunkt; aber alle $x = -c$ liegen reell auf der Fläche, da es für sie zwei reelle Fortschreitungsrichtungen gibt. Die Untersuchung wird indes selten so einfach wie hier; schon bei den zwei anderen Doppelkurven ist es zunächst nötig, die beiden Flächen durch Transformation

$$x = (x - z)\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z = (x + z)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

auf die Ebene $x = z$ als Ebene $z' = 0$ zu beziehen und dann statt der obigen einfachen Substitutionen die Taylor'sche Entwicklung vorzunehmen, die sich auf

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2}\cdot\varepsilon^2 + \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2}\cdot\zeta^2 = 0 \text{ reduziert.}$$

deren anderer durch den Schnitt $x = -c_2$, wo aber $|c_2| > |3|$, repräsentiert ist; die Schnitte $z =$ konst. sind geradezu kongruent den Schnitten $x =$ konst., weil ja die Vertauschung von x und z die beiden Flächengleichungen nicht ändert.

Die beiden Schnittkurven $x = +c_1$ und $x = -c_2$ kann man an dem beigegebenen Flächenbilde Taf. 1, Fig. 1 leicht erkennen.

Dieses Bild zeigt nämlich (von Deformationen abgesehen) die Flächenpartien in ihrer gegenseitigen Durchdringung, in soweit sie eingeschlossen sind von den Ebenen

$$y = 0,\ y = +c;\ x = +c,\ x = -c;\ z = +c,\ z = -c.$$

Die Schnitte $x = -c$, und $z = +c$ zeigen die zwei erwähnten Kurvenformen beider Flächen. Denkt man sich das Bild an der Ebene $y = 0$ gespiegelt, so erhält man die symmetrisch gelegenen Teile der Flächen.

Es erübrigt noch die Lagen der beiden Flächen zu einander, insbesondere deren Durchdringungskurven zu besprechen. Die später anzustellenden Betrachtungen (vergl. § 12) der Transformationen, welche in § 4 aufgestellt wurden, führen auf einfachem Wege zu folgenden Resultaten:

Die Flächen $C_1 = 0$ und $U_1 = 0$ durchdringen sich nur in *zweien* im Endlichen gelegenen Kurven, deren jede zwei Zweige hat, die, wie überhaupt beide Flächen, bezüglich der Ebene $y = 0$ symmetrisch liegen. Die erste, im Bilde mit Θ'_1 bezeichnete Kurve liegt auf dem *einschaligen* Rotationshyperboloid:

(IV) $$Q'_1 \equiv y^2 + 2(xz - 1) = 0$$

dessen Axe die Gerade:

$$y = 0,\quad z = -x \text{ ist,}$$

und sie wird auf ihm von dem Cylinder (Tafel IV, Fig. 1)

(V) $$T'_1 \equiv 3x^2z^2 - 4(x^3 + z^3) + 6xz - 1 = 0$$

ausgeschnitten. — Die zweite Kurve Θ_1 liegt auf dem *zweischaligen* Rotationshyperboloid

(VI) $$Q_1 \equiv y^2 - 2(xz - 1) = 0$$

dessen Axe die Gerade $y = 0$, $x = z$ ist, und sie wird von dem Cylinder (Tafel IV, Fig. 2)

(VII) $$T_1 \equiv x^2z^2 + 4(x^3 + z^3) + 18xz - 27 = 0$$

auf die Ebene $y = 0$ projiziert.

Längs dieser Kurve Θ_1, die in dem gemeinschaftlichen Punkte

$y = \pm 4$, $x = z = -3$ der Doppelkurven P_1 und S_1 beider Flächen mit einer Spitze beginnt, und von hier aus mit (absolut genommen) wachsenden Ordinaten ins Unendliche verläuft, *osculieren* sich beide Flächen. Eine weitere im Endlichen gelegene Doppel- oder Durchdringungskurve ist *nicht* vorhanden.

Infolge der Durchdringung der Flächen C_1 und U_1 entstehen die Zellen 1 bis 14; *) sie werden sämtlich von der Ebene $x = z$ durchschnitten. Das Bild dieses Schnittes liefert Fig. 2, Tafel I.

§ 8. **Die Wendepunktskriterien der 14 Zellen des Raumes R_1.**

Man erkennt unschwer, dafs alle Punkte $x_1\ y_1\ z_1$ *ein und der nämlichen* Zelle, in die Wendepunktsgleichung eingeführt, stets die nämlichen Realitätsverhältnisse der Wurzeln dieser Gleichung zur Folge haben; denn ein reelles Wurzelpaar kann nur dann imaginär werden, wenn die Discriminante durch null geht, d. i. wenn der Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ die Zelle verläfst, indem er die Flächen durchschreitet. Berechnet man daher für irgend einen Punkt einer Zelle die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung 6ten Grades, durch irgend eine Methode für die Auflösung numerischer Gleichungen, so gilt das Resultat allgemein für die ganze Zelle und man kann auf diese Weise eine Tabelle sich verschaffen, die jede Zelle in Bezug auf die Anzahl der ihr zukommenden reellen Wurzeln charakterisiert.

Hiebei kommt es nun sehr zu statten, dafs die Ebenen $x = z$, für welche die Wendepunktsgleichung eine *reciproke* Gleichung wird, alle Zellen durchsetzt; wir brauchen den einen Punkt, der den Charakter einer Zelle bestimmt, nur in dieser Ebene zu wählen.

Die folgende Tabelle liefert die Resultate dieser Untersuchung.

		Mittelzellen			Zellen in der Richtung der pos. y					
Bezeichnung der Zelle		1	3	10	4	5	6	7	8	9
Anzahl der reellen Wurzeln in ihr		2	2	2	4	6	4	6	2	0
Vorzeichen des Substitutionsresultates eines Punktes in	C_1	−	−	−	+	−	−	+	+	−
	U_1	−	−	−	−	−	+	+	+	+
	Δ_1	+	+	+	−	+	−	+	+	−

*) Die beiden im Endlichen getrennt liegenden Zellen 8 für pos. und neg. Werte y hängen (vergl. § 12) durchs Unendliche zusammen.

Die zu 4, 5, 6, 7, 9 symmetrisch gelegenen Zellen: 2, 14, 13, 12, 11 sind gerade so charakterisiert, wie die entsprechenden in der Tabelle;*) denn sie unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von y, was auf die Gleichung 3ten Grades

$$\varphi(\rho) \equiv \rho^3 + 3(x-1)\rho + \frac{2}{y}(y^2 + 2(x^2-1)) = 0,$$

in welche $W_1(\lambda x y z)$ für $x = z$ übergeführt werden kann, nur den Einfluſs hat, daſs auch hier sich das Vorzeichen der Wurzeln, nicht aber deren Realität sich ändert.*)

§ 9. Diskussion des Flächenpaares im Raume R_2.

Für diesen Raum stellte ich in § 5 als Gleichungen der Cuspidal- und Undulationsfläche auf:

$$C_2 \equiv \xi \cdot (\eta^4 \xi^5 + 8\eta^2\xi^2\{\zeta(1-\xi^3)(3\xi-\zeta^2) - 2\xi^2(\xi-3\zeta^2)\} - 16\{(1-\xi^3)(\xi-3\zeta^2) + 2\xi\zeta(3\xi-\zeta^2)\}^2) = 0$$

$$U_2 \equiv \xi \cdot (\eta^2\xi^3 + (\xi^3 - 6\zeta\xi - 1)^2) = 0$$

Das Produkt beider Flächen bildet wieder die Discriminante der Wendepunktsgleichung:

$$W(\xi\eta\zeta\lambda) \equiv \lambda^6 + 3\frac{(\xi^2-2\zeta)}{\xi}\lambda^4 + 2\eta\lambda^3 + 3\frac{(1+2\xi\zeta)}{\xi}\lambda^2 + 1 = 0$$

welche den Punkten des Raumes R_2 zugeordnet ist.

Die Diskussion der Fläche U_2 ist äuſserst einfach. Ihre einzige Doppelkurve

$$U_{2d} \equiv \xi^3 - 6\xi\zeta - 1 = 0$$

ist eine Kurve C^3 mit reellem Doppelpunkte, der auf der ζ-Axe im Unendlichen liegt; der auf dem Gebiet den pos. ξ liegende Ast der Kurve verläuft isoliert, der parabolische Zug reell auf der Fläche. (Siehe Tafel IV, Fig. 3.)

Die Fläche selbst ist überhaupt nur für negative ξ reell. Sie besteht aus der Ebene $\xi = 0$ und der Regelfläche, mit der Leitebene $\xi = 0$, der Doppelkurve $U_{2d} = 0$, und etwa der Schneidlinie

$$\zeta = 0,\ \eta^2 = -\frac{(\xi^3-1)^2}{\xi^3}$$

einer Linie von der Gestalt der Rückkehrkante von C_2, Taf. IV. Fig. 4.

Die Undulationsfläche teilt also den Raum R_2 in fünf Zellen. Die eine bildet der ganze Halbraum der positiven ξ; die vier andern teilen sich in den der negativen ξ. (Man vergl. in Tafel II, Zelle $\overline{12}$, $\overline{19}$, $\overline{11}$ und die zu $\overline{11}$ symmetrische.)

*) Die weiteren im Bilde der Tafel I ersichtlichen Zellen werden aus obigen 14 durch neue Flächen abgetrennt; ihre Diskussion erfolgt im 2ten Teile.

Weniger einfach wird die Diskussion der Fläche $C_2 = 0$, die in die Ebene $\xi = 0$, und eine Fläche 10ten Grades zerfällt. Ich stelle zunächst die Doppelkurven derselben auf.

Eine erste Doppelkurve ergibt sich direkt aus der Flächengleichung; es ist die unikursale Kurve 5ter Ordnung (Fig. 6) Taf. IV.

$$C_{2d} = (1 \cdot \xi^3)(\xi - 3\zeta^2) + 2\xi\zeta(3\xi - \zeta^2) \cdot 0, \eta \quad 0.$$

Sie hat eine Spitze im Punkte $\xi = -1\ \zeta = +1$, und einen Doppelpunkt im Unendlichen auf der ζ-Axe, welche die Kurve überdies im Punkte $\xi = 0$ berührt.

Sie verläuft nur soweit reell auf der Fläche, als sie im Bilde ausgezogen ist; die punktierten Teile sind isoliert.

Ebenso ergibt sich direkt aus der Gleichung, dafs die η-Axe Doppelkurve, und zwar zeigt die nähere Untersuchung, dafs sie Rückkehrkante ist.

Die weiteren Doppelkurven stelle ich wieder durch Spezialisierung der Wendepunktsgleichung auf. Ich bilde wieder eine reciproke Wendepunktsform, indem ich setze:

$$\frac{\xi^2 - 2\zeta}{\xi} = \frac{1 + 2\zeta\xi,}{\xi}$$

oder:

$$\frac{1}{\xi}(\xi + 1)(\xi - 2\zeta - 1) = 0.$$

Die Wendepunktsform wird also für endliche Werte reciprok, wenn

1) $\xi = -1$

2) $\xi = 2\zeta + 1$

Im ersten Falle erhält man:

$$W(-1\eta\zeta\lambda) \equiv \lambda^6 - 3(2\zeta - 1)\lambda^4 + 2\eta\lambda^3 - 3(2\zeta - 1)\lambda^2 + 1 = 0.$$

Nach dem früher aufgestellten Hilfssatze ist die Discriminante dieser Gleichung:

(I) $$c \cdot \Delta^2[\varphi(\rho)] \cdot \varphi(+2) \cdot \varphi(-2)$$

$$\equiv c \cdot (\eta^2 + 8(\zeta - 1)^3)^2 \,(\eta + 2(1 - 3\zeta))\,(\eta - 2(1 - 3\zeta)).$$

In den beiden linearen Faktoren erkennt man sofort die Substitutionsresultate, die aus der Undulationsfläche für $\xi = -1$ hervorgehen. Daher ist der 3te Faktor die Gleichung einer Doppelkurve der Cuspidalfläche

$$P_2' = \begin{cases} \xi + 1 = 0 \\ \eta^2 - 8(1 - \zeta)^3 = 0 \end{cases}$$

Sie ist eine semi-cubische Parabel, die im Punkte $\xi = -1$, $\zeta = +1$, $\eta = 0$ ihre Spitze hat. Von dieser Spitze aus verläuft sie anfänglich isoliert in der Richtung der negativen ζ (Tafel IV, Fig. 7)

bis zum Punkte $\xi = \zeta = -1$, $\eta = \pm 8$, von wo aus sie reell der Fläche angehört.

Im zweiten Falle erhält man durch die Substitution:

$$\xi = 2\zeta + 1$$

die Wendepunktsform:

$$W(\lambda) \equiv (2\zeta + 1)\lambda^6 + 3(4\zeta^2 + 2\zeta + 1)\lambda^4 + 2\eta(2\zeta + 1)\lambda^3 + 3(4\zeta^2 + 2\zeta + 1)\lambda^2 + (2\zeta + 1) = 0.$$

Ihre Discriminante ist wieder, wenn wie oben $\varphi(\rho)$ die zugehörige Gleichung 3ten Grades bedeutet:

(II)
$$c \cdot \Delta^2 [\varphi(\rho)] \cdot \varphi(+2) \cdot \varphi(-2)$$
$$\equiv c \cdot (2\zeta+1)^2 (\eta^2(2\zeta+1)^3 + 64\zeta^6)^2 (16(2\zeta+1+3\zeta^2)^3 - \eta^2(2\zeta+1)^2)$$
$$\equiv c \cdot \xi^2 (\eta^2 \xi^3 + (\xi-1)^6)^2 (4\xi + 3(\xi-1) + \eta\xi) \cdot (4\xi + 3(\xi-1) - \eta\xi).$$

Der Faktor 6ten Grades tritt zwar quadratisch auf, aber nicht weil er etwa Doppelkurve einer Fläche, sondern weil er eine Durchdringungskurve von $U_2 = 0$, und $C_2 = 0$ darstellt. Denn man erkennt leicht, dafs

(III)
$$\eta^2 \xi^3 + (\xi - 1)^6 = 0$$

das Substitutionsresultat von $\xi = 2\zeta + 1$ in $U_2 = 0$ ist, so dafs also der 2te Faktor 6ten Grades notwendig von $C_2 = 0$ herrühren mufs. Die beiden andern Faktoren stellen Hyperbeln dar, die neben der Durchdringungskurve von der Ebene $\xi = 2\zeta + 1$ auf $C_2 = 0$ ausgeschnitten werden. Hiezu tritt endlich noch als 4te Schnittkurve, die Doppelgerade $\xi_2 = 0$, nach welcher diese Ebene die gemeinschaftliche Ebene der Cuspidalfläche und Undulationsfläche schneidet.

Die Cuspidalfläche besitzt auch noch eine räumliche Rückkehrkante, die sich auf folgendem Wege erkennen läfst. Die Gleichung $C_2 = 0$ ist in $(\eta^2 \cdot \xi^3)$ quadratisch.

Ich schreibe sie in der Form:

$$(\eta^2 \xi^3)^2 + 2\eta^2 \xi^3 A = \xi B^2,$$

ergänze die linke Seite zu einem reinen Quadrat und erhalte:

$$\{\eta^2 \xi^3 + A\}^2 = A^2 + \xi B^2,$$

oder:

$$\{\eta^2 \xi^3 + A\}^2 = \{A + i\sqrt{\xi} \cdot B\} \cdot \{A - i\sqrt{\xi} \cdot B\}.$$

Die beiden Faktoren rechts enthalten nur die Variabeln ξ und ζ. Nun ist die Koordinatenaxe $\xi = 0$, $\zeta = -0$ eine Rückkehrkante. Es mufs sich also die rechte Seite in zwei andere Faktoren $M \cdot N^3$ zerfallen lassen, so dafs in N kein Absolutglied auftritt.

In der That findet man:

$$A \pm i\sqrt{\xi}\,B \quad 4\,\{\zeta \mp i\sqrt{\xi}\}^3 \cdot \{1 \pm i\sqrt{\xi}\}^2$$

und demnach:

$$\{A + i\sqrt{\xi}\cdot B\}\cdot\{A - i\sqrt{\xi}\,B\} = 16\,\{\zeta^2 + \xi\}^3\,\{1 + \xi^3\}^2.$$

Die Gleichung der Cuspidalfläche läfst sich daher in der Form darstellen:

$$\text{(IV)}\quad \{\eta^2\xi^3 + 4(\zeta(1-\xi^3)(3\xi-\zeta^2) - 2\xi^2(\xi \quad 3\zeta^2))\}^2 = 16(1+\xi^3)^2(\zeta^2+\xi)^3$$

Daher ist die Gleichung der Rückkehrkante:

$$\text{(V)}\qquad \Theta_{2a}\ \begin{cases} T_2 = \zeta^2 + \xi = 0 \\ \zeta^3\{\eta^2\zeta^3 + 16\,(1-\zeta^3)^2\} = 0 \end{cases}$$

indem man die gleich null gesetzte linke Seite der Flächengleichung noch mit Hilfe $\xi = -\zeta^2$ vereinfacht. Ihre Gestalt zeigt Fig. 4, Tafel IV. Eine spätere Untersuchung wird zeigen, dafs man einen der beiden Cylinder auch ersetzen kann, durch die Fläche 4ter Ordnung:

$$\text{(VI)}\qquad T_2' \equiv \eta^2\xi^2 + 16\zeta\,(1 + 2\xi\zeta - \xi^3) = 0.$$

Damit sind nun alle singulären Kurven beider Flächen aufgefunden und es erübrigt nur noch die Bemerkung hinzuzufügen, dafs die drei zuletzt aufgefundenen Kurven: Die Doppelkurve der Ebene $\xi = -1$, die Durchdringungskurve in der Ebene $\xi = 2\xi + 1$, und die Rückkehrkante, alle in den zwei Punkten (biplanare Knotenpunkte)

$$\xi = \zeta = -1,\ \eta = \pm 8$$

sich treffen.

Im Anschlusse an diese Kurven ist es nun nicht schwer, sich ein Bild der Cuspidalfläche zu verschaffen. Abgesehen von der $\xi = 0$ zerfällt sie in drei im Endlichen getrennt liegende Teile (Taf. II). Der eine derselben liegt ganz auf dem Gebiete der pos. ξ-Koordinaten, und kann am besten veranschaulicht werden durch Bewegung einer Schnittkurve $\xi = +$ konst., welche für alle positiven Werte denselben typischen Charakter (Tafel IV, Fig. 5) beibehält. Bewegt sich dieser Schnitt, welcher der Ebene $\xi = \frac{1}{4}$ entspricht unter geeigneter Verzerrung der Kurvenäste so, dafs seine beiden nicht isolierten reellen Doppelpunkte stets auf der in der Ebene $\eta = 0$ befindlichen Doppelkurve Tafel IV, Figur 6 gleiten, dann beschreibt er gerade diesen Teil der Fläche C_2.

Man erkennt hieraus sofort, dafs der ganze Halbraum der pos. ξ durch diesen Flächenteil in fünf Zellen geteilt ist, die genau den fünf Stücken entsprechen, in welche die Schnittkurve $\xi = + c$

die zugehörige Ebene teilt; die beiden Zellen, welche mit den negativen Halbraume kommunicieren würden, werden durch die Ebene $\xi = 0$ davon abgeschlossen.

Der zweite und dritte Teil der Cuspidalfläche besteht aus einer in der Richtung der η-Axe durchs Unendliche zusammenhängende ovalen Schale, deren Rand gebildet wird durch die Rückkehrkante, und deren beide nach der Richtung der negat. ζ konvex gewölbten Oberflächen sich in der Doppelkurve der Ebene $\xi = -1$ durchsetzen. Die Schale schliefst dadurch zwei Paar symmetrisch zu einander gelegene Zellen ab, während der ganze *ausser* ihr liegende Raum der negat. ξ nicht weiter mehr durch $C_2 = 0$ getrennt wird. Somit wird auch dieser Halbraum durch die Fläche $C_2 = 0$ in fünf Zellen geteilt.

Nun breitet sich aber in demselben auch die Undulationsfläche aus, welche nicht nur die *ausserhalb* der Schale befindliche Zelle wieder trennt, sondern auch die vier *in* ihr gelegenen, indem die Fläche $U_2 = 0$ diese Schale durchsetzt. Eine der Durchdringungskurven, nämlich jene, welche $U_2 = 0$ mit der oberen Wölbung bildet, ist nach dem Vorhergehenden (Gleichung (III) dieses §) dargestellt durch

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 2\zeta + 1 \\ \eta^2\xi^3 + (\xi - 1)^6 &= 0 \end{aligned}\right\} P_2''$$

die zweite, nämlich die Durchdringungskurve mit der unteren Wölbung der Schale, liegt, wie ich später zeigen werde, auf der bereits vorhin erwähnten Fläche

und auf $\left.\begin{aligned} T'_2 &\equiv \eta^2\xi^2 + 16\zeta\,(1 + 2\xi\zeta - \zeta^3) = 0 \\ Q_2 &\equiv \xi^3 + 2\xi\zeta - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Theta_2$

In dieser Kurve durchsetzen sich indes nicht nur die beiden Flächen C_2 und U_2, sondern sie oskulieren sich auch, wie sich später sehr einfach ergeben wird. Beide Durchdringungskurven gehen in annähernd gleicher Richtung mit der Rückkehrkante auf der Schale ins Unendliche, indem sie nach zwei Seiten vom gleichen Punkte $\xi = \zeta = -1$, $\eta = \pm 8$, den beiden Scheiteln der Schale, auslaufen. Die Fläche U_2 teilt sonach jede der vier Schalenzellen abermals in zwei Teile, und alle *acht* Zellen sind Flächendreikante, die ihre Spitzen in den eben bezeichneten zwei Punkten haben. Da nun aber die Schale selbst *zwei* jener *vier* Zellen, in welchen U_2 den Halbraum der negativen ξ teilt, wiederum in zwei Teile trennt, einen oberhalb und einen unterhalb der Schale gelegenen, so existieren in diesem Halbraum

$$6 + 8 = 14 \text{ Zellen},$$

von welchen wieder keine wegen der Doppelebene $\xi = 0$ auf das Gebiet der pos. ξ übergreifen kann.

Beide Flächen teilen also den *Raum in 19 Zellen.* Die Tafel 2 gibt ein Bild der Durchdringung jener beiden Flächenhälften von C_2 und U_2, die sich in der Richtung der positiven η-Axe ausdehnen: denkt man sich wieder die Ebene $\eta = 0$ als Spiegel, so liefert das Spiegelbild die andere Hälfte und man erkennt dann leicht die Lage der 19 Zellen.*)

§ 10. Die Wendepunktskriterien der 19 Zellen des Raumes R_2.

Man hat drei Möglichkeiten, die allgemeine Wendepunktsgleichung $W(\xi\eta\zeta\lambda) = 0$ zu spezialisieren, so dafs ihre Discriminante, durch die Discriminanten niedrigerer Gleichungen sich ausdrücken läfst, einmal durch die Punkte der Ebene $\xi = -1$ ein zweites Mal durch die der Ebene $\xi = 2\zeta + 1$, und endlich für die Mittelzellen durch die Punkte der Ebene $\eta = 0$. Überdies wird man auch hier wieder Gebrauch machen von dem Umstande, dafs von allen zu zweien symmetrisch gelegenen Zellen immer nur eine untersucht zu werden braucht, da die symmetrische den nämlichen Charakter besitzt. Nur für die Punkte der Zellen 7 und 8, also jener Schalenzellen, die zunächst an der Doppelkurve der Ebene $\xi = -1$ liegen, ist $W(\xi\eta\zeta\lambda) = 0$ nicht reducibl; ich bestimmte deren Charakter durch die Gräffe'sche Methode zur Aufsuchung imaginärer Wurzeln.

Das Resultat der Untersuchung enthält die folgende Tabelle:

		Mittelzellen					Zellen in der Richtung der $+\eta$						
Bezeichnung der Zelle		1	2	$\overline{3}$	$1\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	7	8	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
Anzahl der reellen Wurzeln in ihr		4	0	4	0	4	2	6	4	4	6	6	2
Vorzeichen des Substitutionsresultates in die Formen:	C_2	−	−	−	+	+	+	−	−	−	−	+	+
	U_2	+	+	+	−	−	+	−	+	+	−	+	+
	Δ_2	−	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+

*) Die Zellen, deren Bezifferung die Zahl 19 übersteigt, oder einen Index besitzt, werden durch die neuen Flächen T_2 und T_2' abgetrennt. (Vergleiche § 14.)

Zu den Zellen $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, $\overline{11}$ liegen symmetrisch die Zellen: $\overline{5}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$, $\overline{17}$, 18

Dafs auch hier symmetrisch gelegene Zellen sich in Bezug auf die Realität der Wurzeln der Wendepunktsgleichung nicht unterscheiden, läfst sich für die gröfsere Zahl der Zellen auf dem nämlichen Wege erkennen, wie für die Zellen des Raumes R_1 am Ende des § 8. Der allgemeine Beweis ergiebt sich aus den Korrespondenzbetrachtungen des zweiten Teiles dieser Abhandlung, der zugleich die Genauigkeit der bisherigen Untersuchungen beider Räume vollkommen bestätigen wird.

§ 11. Kriterien für die Realität der Wurzeln einer Gleichung 6ten Grades.

Die bisherigen Untersuchungen reichen im allgemeinen*) hin, um für eine Gleichung 6ten Grades

(I) $\lambda^6 + 3b_2\lambda^4 + b_3\lambda^3 + 3b_4\lambda^2 + 1 = f(b_i, \lambda) = 0$

unmittelbar die Zahl der ihr zukommenden reellen Wurzeln zu bestimmen.

Zunächst ist die Discriminante negativ in den Zellen 4, 6, 9 (resp. 2, 13, 11), und zwar besitzt Gleichung (I) *stets vier reelle* Wurzeln, wenn $C_1 = +$ $U_1 = -$, also in Zelle 4 (resp. 2). Zur Trennung der beiden andern Zellen 6, 9 (resp. 13, 11) dient der Cylinder $T_1' = 0$, § 7, (V). Für Zelle 6 ist nämlich $T_1' = +$ und beide Koordinaten x und z immer gleichzeitig negativ; für Zelle 9 kann T' positiv oder negativ sein, das erstere aber nur für gleichzeitig positive Werte von x und z. Somit sind diese beiden Fälle völlig getrennt und man hat:

„*Ist* $\Delta = -$, *so besitzt die Gleichung* (I) *keine reelle Wurzel, wenn:*

$C_1 = -$, $U_1 = +$, $\begin{cases} T_1' = +, \; x \text{ und } z = +, \text{ oder} \\ T_1' = -, \; x \text{ und } z \text{ beliebig} \end{cases}$

„*dagegen besitzt sie vier reelle Wurzeln, wenn:*

$C_1 = +$, $U_1 = -$, oder
$C_1 = -$, $U_1 = +$, $T_1 = +$, x und $z = -$.

In den acht übrigen Zellen ist die Discriminante positiv. Um hier die Zellen 5, 7 (resp. 12, 14), für welche Gleichung (I) sechs reelle Wurzeln erhält, von den übrigen zu trennen, benützen wir die

*) Nur nicht wenn die Komparation der Gl. (I) mit $W_1(\lambda)$ in § 3 *A* auf imaginäre Werte von β_3 führt; dann aber hat (I) *vier* reelle Wurzeln. (Vergl. § 15.)

Cylinder P_1 und S_1 § 7, (I). Diese Zellen liegen nämlich im Raume $P_1 = +$, $S_1 = -$ bei gleichzeitig negativen Werten von x und z, und man kann zeigen, dafs keine weiteren Zellen auf die gleiche Weise charakterisiert sein können. Da nämlich $T_1 = 0$ die beiden Flächen C_1 und U_1 längs der Kurve Θ_1 berührt, so ist einesteils von vornherein ausgeschlossen, dafs (vergl. Fig. 1, Tafel I) innerhalb des Vierkantes $\lambda\mu\nu\rho$ der Cylinder P_1 die Fläche U_1, oder S_1 die Fläche C_1 schneide. Andernteils kann aber auch weder U_1 von S_1, noch C_1 von P_1 in dem bezeichneten Raume durchsetzt werden. Denn die Projektion der Schnittkurve $P_1 = 0$, $C_1 = 0$ auf $y = 0$ ist:

$$M = (x - z)^2 \left(z\,(1 - x) - x\,(x - 2)\right) = 0$$

und ebenso ist die Projektion des Schnittes von $U_1 = 0$, $S_1 = 0$

$$N = (x - z)^2 \left(x^4 z^2 - z\,(1 + 2x - x^2 + x^3 - x^5) + (x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 2x)\right) = 0.$$

Der zweite Faktor von M ist eine Hyperbel, die durch keinen Punkt mit gleichzeitig negativen Koordinaten x und z befriedigt wird, und die Kurve 6ter Ordnung in $N = 0$, wird von allen Geraden $x =$ konst. nur in zwei endlichen reellen Punkten getroffen, die für $x = \pm 1$ in $z = \pm$ zusammenfallen und für $+1 < x < -1$ imaginär werden. Die Zellen 5, 7 (resp. 12, 14) sind also in der That durch die oben gegebene Vorzeichenkombination völlig von allen andern getrennt und man hat:

„*Ist* $\Delta = +$, *so besitzt die Gleichung* (I) *sechs reelle Wurzeln, wenn:*

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = -,\ U_1 = - \\ C_1 = +,\ U_1 = + \end{array}\right\} P_1 = +,\ S_1 = -,\ x \text{ und } z = -$$

„*dagegen besitzt sie zwei reelle Wurzeln für alle übrigen Zeichenkombinationen von* P_1, S_1, x *und* z *bei gleichen Vorzeichen von* C_1 *und* U_1“.

In ähnlicher Weise hat im 20ten Band der Math. Ann. Hr. Prf. Brill die Kriterien für die Realität der Wurzeln der Gleichung

$$\text{(II)} \quad \lambda^6 + 2p\lambda^5 + 3q\lambda^4 + 4r\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2p\lambda + q = 0$$

aufgestellt. Die Flächen C und U sind indes dort Funktionen der Gröfsen p q r. Der Zweck der vorliegenden Untersuchung erheischte es aber, nicht die Gröfsen b_i als Koordinaten einzuführen, sondern die Gröfsen α_i, β_i, durch welche sich b_2, b_3, b_4 der Gleichung (I) *rational* ausdrücken. Hiedurch wurde allerdings nicht nur der Grad der Flächen C_1 und U_1 wesentlich erhöht, sondern es stellt sich auch die Notwendigkeit ein, ein zweites Flächenpaar C_2 und U_2 in die Diskussion einzuführen. Dafür aber wurden die Gleichungen aller andern, für

die Kriterien der Kurvensingularitäten wichtigen Flächen äufserst einfach, da diese ja sich zunächst direkt in den Gröfsen α_i, β_i und nicht in den Koefficienten $b_2\ b_3\ b_4$ rational darstellen, und es gelang auch, die vier Möglichkeiten von reellen Wurzelpaaren in einfacher Weise auseinander zu halten.

Die oben für die Gleichung (I) aufgestellten Kriterien gelten nicht blofs für diese Form, sondern auch für die allgemeine Gleichung 6ten Grades, die sich auf folgende Weise in die Normalform (I) transformieren läfst. Wir haben gesehen: Durch Komparation der allgemeinen Gleichung 6ten Grades

(III) $f = b_0\lambda^6 + b_1\lambda^5 + b_2\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_4\lambda^2 + b_5\lambda + b_6 = 0$

mit der allgemeinen Wendepunktsform $W(\lambda\alpha_i\beta_i) = 0$ erhalten wir (vergl. Math. Ann. Bd. 20, Seite 341) eine Gleichung 5ten Grades für α_3. Kennt man eine Wurzel $\alpha_3 = \varphi(b_i)$ dieser Gleichung, so läfst sich dazu ein Wertsystem α_i, β_i in Funktion der Koefficienten b_i berechnen und in die Formen (T) (§ 1) einführen. Aus irgend zweien derselben eliminieren wir die Gröfse p, wodurch wir eine Gleichung 4ten Grades für s erhalten. In Verbindung mit der 5ten dieser Formen (T), welche in p linear ist, können wir alsdann vier Wertepaare μ und ν berechnen, nämlich die acht Parameter der vier Doppeltangenten, d. h. wir können eine völlig bestimmte rationale Kurve 4ter Ordnung der allgemeinen Gleichung 6ten Grades derart zu ordnen, dafs sie Wendepunktsgleichung dieser C^4 ist. Sind dann f_1, f_2, f_3, f_4 die vier Doppeltangentenformen derselben, so können wir weiter nach § 2 sie *linear* so transformieren, dafs entweder eine derselben die Wurzeln 0 und ∞ besitzt, oder wenn alle vier Parameterpaare konjugiert imaginär sein sollten, dafs zwei derselben die Form erhalten:

$$f_1 = \lambda^2 + d,\ f_2 = \lambda^2 + e.^*)$$

Stellen wir dann für die so transformierte Kurve die Wendepunktsgleichung auf, welche ja mit der oben gegebenen allgemeinen Gleichung 6ten Grades identisch ist, so erhält sie durch die Substitution $\frac{\alpha_0}{\alpha_6} \cdot \lambda^6 = \lambda_1^6$ die Form der Gleichung (I), d. h. die Gleichung (III) ist in (I) transformiert.

*) Dies setzt nur voraus, dafs es mindestens *ein* System α_i, β_i gibt, das durchwegs reelle Werte hat, damit nicht die Doppeltangentenformen selbst imaginäre Koefficienten erhalten. Die Gleichung für α_5 ist aber vom Grade 5, die für α_4 alsdann vom Grade 3, alle übrigen bestimmen sich aus der einen reellen Wurzel α_3 und α_4 linear und sind daher mit diesen reell.

II. Teil.

§ 12. Transformation des Raumes R_1 in sich.

Läfst man im Raume R_1 den Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ auf einer Geraden

$$x = \text{konst.},\ z = \text{konst.}$$

wandern, dann bewegt sich gemäfs den Transformationsgleichungen § 4, (I) der entsprechende Punkt auf der nämlichen Geraden. Alle Geraden also, parallel der y-Axe sind die Träger zweier projektivischen Punktreihen, deren Doppelpunkte sonach auf einer Fläche 2ter Ordnung liegen müssen; sie heifse die *Koincidenzfläche* des Raumes R_1 und sei mit $Q_1 = 0$ bezeichnet. Da auf ihr der Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ mit seinem entsprechenden $x_2\ y_2\ z_2$ zusammenfällt, so erhält man deren Gleichung einfach aus (I) § 4, indem man setzt $y_1 = y_2 = y$, $x_1 = x_2 = x$, $z_1 = z_2 = z$, also

$$(I) \qquad Q_1 = y^2 - 2\,(xz - 1) = 0$$

Die Fläche ist ein zweischaliges Rotationshyperboloid, deren Meridian $xz - 1 = 0$, und deren Rotationsaxe die Gerade $x - z = 0$ ist. Sie enthält also auch die in der Ebene $y = 0$ gelegenen Doppelkurven von C_1 und U_1; insbesondere wird sie von der Ebene $x = z$ nach einer Hyperbel geschnitten, deren Lage zu den übrigen Schnittkurven dieser Ebene mit C_1 und U_1 bereits aus der früher gegebenen Figur (Fig. 2, Taf. I) ersichtlich ist.

Die Punktreihen aller Geraden sind entweder gleich- oder ungleichlaufend, je nachdem die Gerade aufserhalb oder innerhalb der Jacobischen Fläche

$$(II) \qquad J_1 \equiv xz - 1 = 0$$

der Transformationsgleichungen sich befindet.

Rückt der Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ auf eine der Flächen C_1 oder U_1, dann rückt gemäfs den Betrachtungen des § 3 auch $x_2\ y_2\ z_2$ auf eine derselben (ebenso auch die drei entsprechenden Punkte in R_2).

Daraus erhellt, dafs man auch die einzelnen Zellen einander eindeutig zuweisen kann, und dafs im Raume R_1 die Korrespondenz je zweier Zellen durch ein einziges sich entsprechendes Punktepaar bestimmt ist. Im allgemeinen wird dabei einer Zelle immer eine andere entsprechen; nur jene Zellen, welche die Koincidenzfläche durchsetzt,

müssen sich selbst entsprechen, weil einesteils die beiden korrespondierenden Punkte zugleich auf die Koincidenzfläche rücken müssen, und anderenteils nicht der eine Punkt die Wandung einer Zelle durchschreiten kann, ohne dafs nicht der korrespondierende Punkt das Gleiche thut.

Daher ist es wichtig, zunächst sich über die Lage von Q_1 zu C und U_1 zu unterrichten. Diese ist aber sehr leicht zu ermitteln, da eine der gemeinschaftlichen Durchdringungskurven der drei Flächen bereits in der Hyperbel

$$xz - 1 = 0,\ y = 0$$

gegeben ist, während eine zweite, und zugleich letzte im Endlichen gelegene gemeinschaftliche Schnittkurve, die bereits früher erwähnte Schnittkurve $\Theta_1 = 0$ ist, deren Lage man leicht aus Tafel I erkennt. Diese Kurve liegt eben innerhalb der Fläche $J_1 = 0$, und es ist klar, dafs bei den gegebenen Voraussetzungen jede innerhalb dieser Fläche gelegene Schnittkurve von C_1 und U_1 auch auf Q_1 liegen mufs, da die beiden Flächen durch die Transformation *in einander* übergehen.

Letzteres ist sofort ersichtlich; man findet direkt, durch Substitution $x_1 = x_2,\ z_1 = z_2\ y_1\ y_2 = 2\ (x_2\ z_2 - 1)$ in $C_1\ (x_1\ y_1\ z_1)$ die Beziehung:

$$C_1\ (x_1\ y_1\ z_1) \equiv (x_2\ z_2 - 1)^2 \cdot U_1\ (x_2\ y_2\ z_2).$$

Übrigens liefert auch die Substitution $y^2 = 2\ (xz - 1)$ in $C_1 = 0$ und $U_1 = 0$ von einem Zahlenfaktor abgesehen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} J_1\ T_1 \equiv 0 \\ \text{resp. } J_1^2\ T_1 = 0 \end{array}\right\} \text{(III)},$$

wobei (vergl. § 7, (VII))

$$T_1 \equiv x^2 z^2 + 4\ (x^3 + z^3) + 18xz - 27 = 0.$$

Innerhalb $J_1 = 0$ besitzen U_1 und C_1 keine weitere gemeinschaftliche Durchschnittskurve mehr. Denn sie müfste gemäfs der Gleichungen (III) mit Θ_1 gleichzeitig auf dem Cylinder T_1 liegen, und sonach dessen Erzeugende die Koincidenzfläche *zweiten* Grades Q_1 in mehr als *zwei* Punkten treffen.

Dagegen liegt aufserhalb $J_1 = 0$ noch eine zweite und letzte Durchdringungskurve. Denn die Substitution: $y^2 = 2\ (1 - xz)$ in die beiden Gleichungen $C_1 = U_1 = 0$ liefert:

$$\left.\begin{array}{r} J_1 \cdot T_1' = 0 \\ \text{resp. } J_1^2 \cdot T_1' = 0 \end{array}\right\} \text{(IV)},$$

wobei nach § 7, (V)

$$T_1' = 3x^2 z^2 - 4\ (x^3 + z^3) + 6xz - 1$$

ist. Diese zweite Durchdringungskurve Θ_1' liegt also auf dem einschaligen Hyperboloid

$$Q_1' \equiv y^2 + (xz - 1) = 0$$

Man erkennt ebenso wie vorhin, dafs Θ_1' die einzige Kurve ihrer Art ist, aufserhalb des Cylinders $J_1 = 0$.

Gemäfs der Transformation

$$y_1 y_2 = 2\ (x_2 z_2 - 1),\ x_1 = x_2,\ z_1 = z_2$$

entspricht dem Punkte $y_1 = 0$ auf der Geraden $x_1 = c_1$, $z_1 = c_2$ der Punkt $y_2 = \infty$; eine Ausnahme machen nur die Punkte $y_1 = 0$ der Fundamentalkurve $xz - 1 = 0$, also der Basiskurve der Jacobischen Fläche; ihnen entsprechen sämtliche Punkte der jeweilig durch sie gehenden Erzeugenden.*)

Da nun die y-Ordinaten zweier entsprechenden Punkte im allgemeinen einander umgekehrt proportional sind, so ist sehr leicht ohne jegliche Rechnung die Zellenkorrespondenz zu erledigen.

Man wird zu dem Zwecke drei Gattungen von Zellen unterscheiden: Zellen, die *nur* einer andern entsprechen, Zellen, *die sich selbst* entsprechen, und Zellen, die teils *mit sich selbst*, teils mit *anderen* Zellen korrespondieren. Zu dieser Unterscheidung dient gerade die Cylinderfläche $J_1 = 0$, und die von ihr längs der Hyperbel $xz - 1 = 0$, $y = 0$ berührte Koincidenzfläche Q_1.

Nur Zellen, welche von der Koincidenzfläche durchsetzt werden, können sich selbst entsprechen, dies sind die Zellen 2, 4, 6, 9, 11, 13. Von diesen liegen 2 und 4, 9 und 11 teils innerhalb, teils aufserhalb der Fläche $J_1 = 0$; sie bildet die Grenze zwischen den Punkten, in denen sich die Zelle selbst entspricht, und jenen, wo die Zellenpaare wechselseitig korrespondieren. Den ersten Teil der Zelle wollen wir nötigenfalls durch einen der Ziffer angehängten Index i charakterisieren. Man erkennt auch, dafs die in Tafel I Fig. 2 mit 8 bezeichneten Zellen als einzige aufzufassen sind; denn durchschreitet der Punkt y_1 die Ebene $y = 0$, so durchwandert y_2 das Unendliche; da aber y_1 keine Fläche im allgemeinen hiebei durchsetzt, so ist dies auch für y_2 unmöglich.**)

Die Fläche $T_1 = 0$ zerlegt die Hälfte von den 14 Zellen in neue, die später von hervorragender Bedeutung werden. Es sind das die

*) Die Wendepunktsform verschwindet auch für $y = 0$, $xz - 1 = 0$ identisch.

**) Es mag jedoch darauf hingewiesen werden, dafs y und $\frac{1}{y}$ mehrfache Faktoren der Discriminante von $W(xyz\lambda)$ sind, so dafs durch diese Ebenen $y = 0$, $\frac{1}{y} = 0$ die beiden Zellen 8 allerdings getrennt werden, jedoch ohne Einfluſs für die Singularitäten der Kurven ihrer Punkte.

Zellen 1, 2, 3, 4, 8, 9, 11. Die Lage der neuen Zellen ist leicht zu übersehen, da T_1 Cylinderfläche ist. So werden insbesondere (siehe Tafel 1, Fig. 1) die Zellen 15, 16, 17, 18 aus 4 abgetrennt und entsprechend 19, 20, 21, 22 aus 2; so wird 3, 9 und 11 in zwei dagegen 1 und 8 in drei Teile zerlegt, die wir mit 1, 3, 9, 11, 8 resp. 1_t, 1_{t^0}, 3_t, 9_t, 11_t, 8_t und 8_{t^0} bezeichnen wollen, je nachdem das Substitutionsresultat eines Punktes in T_1 für sie den Wert — oder + ergibt.

Nicht unmittelbar zu erkennen war, dafs von den Zellen 2 und 4 noch je 2 weitere im Endlichen getrennt liegende Zellen durch die Fläche T_1 abgeschnitten werden. Frägt man sich aber, ob dieser Cylinder von der Durchdringungskurve Θ_1' getroffen wird, oder mit andern Worten, ob die beiden Cylinder T_1 und T_1' Erzeugende gemeinschaftlich haben, so findet man nach leichter Rechnung, dafs die Frage in der That bestätigt werden mufs und dafs infolge dessen noch die Zellen entstehen, die in der Figur mit 4_t, 4_{t^0}, resp. 2_t und 2_{t^0} bezeichnet sind. Die Flächen C_1 U_1 T_1 bilden sonach 33 Zellen, deren Korrespondenz die folgende Tabelle lehrt.

0 reelle Wendepunkte				2 reelle Wendepunkte						6 reelle Wendepunkte	
9_t	9_t	9	11_t	10	1_t	1_{t^0}	1	3	3_t	5	12
9_t *)	11_t	11	11_t *)	8_{t^0} *)	8_{t^0} †)	8_{t^0} †)	8	8*)	8_t	7	14
4 reelle Wendepunkte											
4	4	2	4_t	4_{t^0}	6	13	15	17		19	21
4*)	2	2*)	2_t	2_{t^0}	6	13	16	18		20	22

Die mit *) bezeichneten Zellenteile sind von den gleichbezeichneten durch die Fläche $J_1 = 0$, oder $Q_1 = 0$ getrennt; die beiden Zellengebiete von 8, welche durch †) bezeichnet sind, werden durch die Cylinder $J_1 = 0$, $T_1 = 0$ längs der Erzeugenden $x = z = 1$ auseinander gehalten.

Von allen Zellen sind nur zwei sich wechselseitig entsprechende Zellen *völlig* im Endlichen *geschlossen*, die Zellen 9 und 11.

§ 13. Die Transformation des Raumes R_2 in sich.

Aus den Transformationsgleichungen (III) des § 4 ergibt sich, dafs bei Bewegung eines Punktes $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ in einer Ebene $\eta_1 = c_1$

die beiden entsprechenden Punkte in der nämlichen Ebene sich bewegen, und dafs ihre Ordinaten ξ, ζ von denen des gegebenen Punktes abhängen durch die Gleichungen:

$$(I)\quad \begin{cases} \xi = -\dfrac{\zeta_1}{\xi_1} \pm \dfrac{1}{\xi_1}\sqrt{\xi_1 + \zeta_1^2} \\ \zeta = \dfrac{1 + \xi_1\zeta_1}{2\xi_1} \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{\xi_1 + \zeta_1^2} \end{cases}$$

Verschwindet die Discriminante beider Gleichungen, dann fallen die zwei entsprechenden Punkte zusammen, d. h.

„*Jedem Punkte der Parabel* $\xi + \zeta^2 = 0$ *entspricht ein Doppelpunkt*“. Den Ort aller Doppelpunkte erhält man entweder aus den Gleichungen (I) unter Einführung von $\xi_1 = -\zeta_1^2$ und darauffolgender Elimination von ζ_1, oder wieder direkt, indem man $\xi_1 = \xi$, $\zeta_1 = \zeta$ setzt; dann reduzieren sich *beide* Gleichungen auf

$$(II)\quad \xi^3 + 2\xi\zeta - 1 = 0, \text{ d. h.}$$

„Die Koincidenzkurve der Ebene $\eta_1 =$ konst. ist eine unikursale Kurve 3ter Ordnung, die in ihrem Doppelpunkte $\xi = 0$, $\zeta = -\infty$ von der ζ-Axe und der unendlich fernen Geraden berührt wird.“ (Siehe Tafel IV, Figur 12, Q_2.) „Aufser ihr existiert kein Doppelpunkt mehr in der Ebene und die ihren Punkten eindeutig entsprechenden Punkte liegen auf der Parabel: $\xi + \zeta^2 = 0$.“

Die Schnittpunkte der zwei Kurven können allein dreifache Punkte der Ebene sein; die Untersuchung, ob sie es *wirklich* sind, wird aber sehr einfach, da die Elimination von ζ aus beiden Gleichungen die Relation

$$(\zeta^3 + 1)^2 = 0$$

liefert, welcher die Abscissen der Schnittpunkte genügen müssen; die reelle Doppelwurzel dieser Gleichung $\zeta = -1$, führt in der That zu einem sich dreifach selbst entsprechenden Punkte, mit der Ordinate $\xi = -1$. Die Lage und Gestalt beider Kurven erkennt man aus der oben angegebenen Figur 12, Tafel IV.

Die eben angestellten Betrachtungen waren unabhängig von dem Werte der Konstanten $c_1 = y_1$, sie gelten also für alle Ebenen $y =$ konstant, d. h.:

„*Der Cylinder* $Q_2 \equiv \xi^3 + 2\xi\zeta - 1 = 0$ *ist Koincidenzfläche des Raumes* R_2, *und die ihm eindeutig entsprechende Fläche ist der parabolische Cylinder* $T_2 \equiv \zeta^2 + \xi = 0$; *beide Flächen berühren sich längs der Geraden* $\xi = \zeta = -1$, *und diese Gerade repräsentiert*

die Gesamtheit der dreifachen Punkte des Raumes.“ (Siehe Tafel IV, Fig 12.)

Beschränke ich nun das Gebiet des wandernden Punktes auf eine Gerade der Ebene $y_1 = \text{konst.}$, am besten auf eine vertikale $\xi_1 = a$, dann bestimmen sich die beiden entsprechenden Punkte aus:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \xi = -\frac{\zeta_1}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{a + \zeta_1^2} \\ 2\zeta = \frac{1}{a} + \zeta_1 \mp \sqrt{a + \zeta_1^2} \end{cases}$$

Die Elimination des variablen Parameters ζ_1 lehrt, dafs die beiden entsprechenden Punkte sich gleichfalls auf einer Geraden bewegen, nämlich auf

$$\text{(IV)} \qquad f(a) \equiv a^2\xi + 2a\zeta - 1 = 0$$

Die Enveloppe aller dieser Geraden (a als Parameter gedeutet) ist die Parabel $\xi + \zeta^2 = 0$, d. h. weil auch diese Betrachtung unabhängig von $\eta = \text{konst.}$:

„Jeder Ebene $\xi_1 = a$ entspricht eine Tangentialebene des parabolischen Cylinders, und Gleichung (IV) lehrt sofort, dafs, während die Ebene $\xi_1 = a$ von $a = +\infty$ bis $a = 0$ sich herein bewegt, die Tangentialebene vom Parabelscheitel aus entgegengesetzt der Richtung eines Uhrzeigers auf dem Cylinder abrollt; der Ebene $\xi_1 = 0$ entspricht die ∞ ferne Tangentialebene; indem dann ξ_1 von 0 bis $-\infty$ abnimmt, rollt sie im nämlichen Sinne weiter, bis sie für $\xi = -\infty$ wieder Scheiteltangentialebene geworden ist.“

Es erübrigt noch, die Bewegung der zwei entsprechenden Punkte auf der Parabeltangente klar zu legen, während der erzeugende Punkt auf $\xi_1 = a$, von $\zeta_1 = +\infty$ über 0 nach $-\infty$ wandert. Die Mittel hiezu liefern die Gleichungen (I). Die Bewegung der beiden Punkte ist eine wesentlich verschiedene, je nachdem sie sich auf Parabeltangenten bewegen, die einer Geraden $\xi_1 = +a$ oder $\xi_1 = -a$ entsprechen. (Siehe Fig. 12, Tafel IV.)

Im ersten Falle bewegen sich, während der erzeugende Punkt einmal die Gerade $\xi_1 - a$ durchfliefst, die entsprechenden Punkte auf $f(a) = 0$ in der Art, dafs die Abscisse ξ' des einen von 0 bis $+\infty$, die ξ'' des andern von $-\infty$ bis 0 zunimmt. Die entsprechenden Punkte sind also in diesem Falle *gleichlaufend* und die positive Quelle des einen ist die negative des andern und umgekehrt. Eine Koincidenz beider kann also nicht eintreten, wohl aber findet eine statt zwischen dem erzeugenden Punkte $\xi_1\,\zeta_1$ und dem ersten der entspre-

chenden $\xi'\zeta'$, nämlich in dem Punkte, wo $f(a) = 0$ und $\xi_1 = a$ sich schneiden, einem Punkte der Koincidenzkurve.

Ist im zweiten Falle a negativ, dann entsprechen insbesondere den Punkten $-\sqrt{|a|} < \zeta_1 < +\sqrt{|a|}$ *stets imaginäre Punkte*, während für $\zeta_1 = \pm\sqrt{|a|}$ nach dem früheren die zwei entsprechenden Punkte koincidieren. Man wählt daher am geeignetsten als Ausgangsstelle des erzeugenden Punktes einen der Punkte, in welchen $\xi_1 = -a$ die Parabel $\zeta^2 + \xi = 0$ schneidet, etwa den Punkt q_1' mit der pos. ζ-Ordinate. Er schreite von hier über $+\infty$ zum zweiten Schnittpunkte q_2' mit negat. ζ-Ordinate. Dann bewegt sich $\xi'\zeta'$ und $\xi''\zeta''$ von der gemeinschaftlichen pos. Quelle q_1 auf der Koincidenzkurve, die pos. Abscisse hat, der erste über $+\infty$, der zweite über 0 zur negativen Quelle q_2 auf der Koincidenzkurve, woselbst sie alsdann wieder gemeinschaftlich verschwinden. Die entsprechenden Punkte sind also *ungleich laufend* und haben die gleiche pos. und negat. Quelle.

„*Den Punkten $\xi_1\zeta_1$ innerhalb der Parabel entsprechen imaginäre Punkte und jeder Zellenpartie, welche von dem parabolischen Cylinder $\xi + \zeta^2 = 0$ getroffen wird, entspricht ein imaginäres Zellenpaar.*“

Auf jeder Parabeltangente tritt noch eine dritte Koincidenz q_3 auf, nämlich wieder da, wo $\xi_1 = a$ und $f(a) = 0$ sich auf der Koincidenzkurve schneiden. (Siehe Tafel IV, Fig. 12.)

„*Die Tangente von dem einzigen* **endlichen** *Schnittpunkte der Geraden $\xi_1 = \pm a$ mit der Koincidenzkurve an die Parabel ist stets die der Geraden $\xi = a$ entsprechende Gerade $f(a) = 0$.*“

Was für die Ebene $\eta_1 = c$ galt, überträgt sich wie früher auf den ganzen Raum.

§ 14. Die Zellenkorrespondenz im Raume R_2 und die Korrespondenz beider Räume.

Wir können nun zur Aufstellung der Zellenkorrespondenz schreiten. Zwei Mittel stehen uns zu Gebote: 1) die eben entwickelten geometrischen Untersuchungen, 2) die direkten Transformationsgleichungen (III) § 4 des Raumes R_1 in den Raum R_2. Ich benütze zur Sicherheit beide. Indem man aber an die Ermittelung der Zellenkorrespondenz herantritt, zeigt es sich, dafs die in § 9 bestimmten 19 Zellen zur unzweideutigen Zerlegung des Raumes R_2 noch nicht genügen. Vielmehr ergibt sich, wie nicht anders zu erwarten war, dafs wie im Raume R_1 die Flächen T_1, Q_1 und J_1, so

auch hier im Raume R_2 die ihnen entsprechenden Flächen zur Zellenbildung eingeführt werden müssen. Die Gleichungen dieser entsprechenden Flächen liefern aber unmittelbar die Transformationsgleichungen (III) des § 4. Kraft derselben findet man:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \text{„Den Flächen:} & C_1 \cdot U_1 & T_1 & Q_1^2 \quad J_1 \\ \text{„entsprechen die Flächen:} & C_2 \cdot U_2 & T_2 \cdot Q_2^2 & T_2' \quad \zeta \cdot J_2 \end{array}$$

Hiebei sind Q_2 und T_2 die eben diskutierten Flächen. Die der Koincidenzfläche $Q_1{}^2$ entsprechende Fläche

$$T_2' = \eta^2 \xi^2 + 16\zeta (1 + 2\xi\zeta - \xi^3) = 0$$

ist eine Fläche 4ter Ordnung, die im Punkte $\xi = 1$ der ξ-Axe einen konischen Punkt besitzt. Ihre Schnitte $\xi =$ konst. sind für pos. ξ Ellipsen, für $\zeta = 0$ ein Geradenpaar, nämlich die η-Axe und die unendlich ferne Gerade, für negative ξ aber Hyperbeln; die Hauptaxen aller Kegelschnitte sind parallel den Koordinatenaxen des Raumes R_2 und ihre Mittelpunkte liegen sämtlich in der Ebene $\eta = 0$. Die Fläche selbst wird berührt von der Ebene $\zeta = 0$ nach den Axen $\eta = \zeta = 0$, $\xi = \zeta = 0$; sie durchsetzt weder C_2 noch U_2.

Die Fläche

$$\zeta \cdot J_2 \equiv \zeta \cdot (\xi^3 - 2\xi\zeta - 1) = 0$$

ist, von der Ebene $\zeta = 0$ abgesehen, das Spiegelbild der Fläche

$$Q_2 \equiv \xi^3 + 2\xi\zeta - 1 = 0$$

an der Ebene $\zeta = 0$. Wie J_1 im Raume R_1, so ist auch J_2 im Raume R_2 ohne Bedeutung für die spätere Besprechung der Kurveneigenschaften.

Aus diesen Flächenkorrespondenzen ergibt sich aber auch die eindeutige Beziehung aller Doppel- und Durchdringungskurven von C_2 und U_2 zu den entsprechenden des Raumes R_1. Der Oskulationskurve Θ_1 in R_1 entspricht die Rückkehrkante Θ_{2a} und die Durchdringungskurve Θ_2, längs welcher sich also gleichfalls C_2 und U_2 osculieren müssen. Durch beide Kurven geht notwendig auch die der Fläche Q_1 entsprechende Fläche T_2', indem sie längs der Kurve Θ_2 die Flächen C_2 und U_2 berührt. Infolge dessen werden von Zelle 19 sechs weitere Zellen abgetrennt: 19_u, $\overline{22}$, $\overline{23}$ und die zu diesen symmetrischen Zellen $\overline{19_u'}$ $\overline{22'}$, $\overline{23'}$ auf Seite der negativen η.

Der Doppelkurve P_1 von C_1 entspricht die Kurve P_2' und der Doppelkurve S_1 von U_1 die Durchdringungskurve P_2''; endlich verifiziert man leicht, dafs der Durchdringungskurve Θ_1' in R_1 die Doppelkurven C_{2d} und U_{2d} in R_2 zugehören.

Im Überblick: Es entsprechen

den Kurven:	Θ_1	P_1	S_1	Θ_1'	in R_1 resp.
die Kurven:	$\Theta_{2a} \cdot \Theta_2$	P_2'	P_2''	$C_{2d} \cdot U_{2d}$	in R_2.

Der Doppelkurve $H_1 \equiv xz - 1 = 0$, $y = 0$ in R_1, der schon dort als Basiskurve des Raumes R_1 die ganze Jacobische Fläche zugehört, entspricht in R_1 die Fläche $J_2 \cdot \zeta$.

Nun konnten wir bei den wesentlich einfacheren Verhältnissen des Raumes R_1 zeigen, daſs weitere Doppel- und Durchdringungskurven als die angeführten nicht vorhanden sind; daher können auch in R_2 nur die ihnen entsprechenden existieren. Infolge dessen ist es auch nicht möglich, daſs die Koincidenzfläche T_2' die Flächen C_2 und U_2 in andern Kurven trifft als den erwähnten, weil dort sonst notwendig C_2 und U_2 Durchdringungs- oder Doppelkurven besitzen müſsten. Sie muſs daher für positive ξ ganz innerhalb Zelle $\overline{2}$ verlaufen und dort die Zelle $\overline{2}_t$ abtrennen; ebenso muſs ihre im Endlichen getrennt liegende Schale auf Seite der negativen ξ ganz innerhalb Zelle $\overline{12}$ liegen und dort die Zelle $\overline{12}_t$ umschlieſsen.

Dagegen muſs das der Fläche T_1 im Raume R_1 entsprechende Flächenpaar $Q_2^2 \cdot T_2$ ganz wie dort neue Zellen abtrennen. Man findet: Der parabolische Cylinder T_2 liegt auf der Rückkehrkante Θ_{2a} und durchsetzt U_2 und T_2' in der Weise, daſs er aus Zelle $\overline{11}$ und der symmetrisch gelegenen $\overline{18}$ die Zellen $\overline{11}_t$ und $\overline{18}_t$, $\overline{11}_u$ und $\overline{18}_u$ ausschneidet, von Zelle $\overline{12}$, die Fläche T_2' im Punkte $\eta = 0$, $\zeta = +1$, $\xi = -1$ berührend,*) den untersten Teil als Zelle $\overline{12}_t$ völlig umschlieſst **) und endlich von Zelle $\overline{19}$ in Verbindung mit T_2' die weitern Zellen $\overline{19}_t$ $\overline{19}_{t'}$ $\overline{19}_a$ $\overline{19}_b$ $\overline{20}$ $\overline{20'}$ $\overline{21}$ $\overline{21'}$ absondert.

Die zwei neuen Flächen T_2, T_2' fügen also zu den 19 alten Zellen noch $6 + 2 + 4 + 1 + 8 = 21$ Zellen hinzu, so daſs der Raum R_2 als in 40 Zellen zerlegt erscheint. Zu diesen treten noch fünf imaginäre Zellen, da ja, wie ich in § 13 gezeigt habe, allen Punkten innerhalb der Fläche T_2, also den Punkten der Zellen: $\overline{11}_t$ $\overline{12}_t$ $\overline{18}_t$ $\overline{19}_t$ $\overline{19}_{t'}$ nur imaginäre Punktepaare entsprechen. „*Die Gesamtzahl der Zellen in R_2 ist also 45, denen im Raume R_1 zunächst 33 reelle* und wie wir gleich sehen werden, *drei imaginäre Zellen, also im ganzen* 36 *Zellen gegenüberstehen.*“

*) Diesem Punkte entspricht in R_1 der Punkt $y = 0$, $x = z = 1$ (siehe Transformationsgl. (II'), in welchem sich gleichfalls die Flächen T_1, Q_1 und J_1 berühren.

**) Vergl. die beiden entsprechenden Zellen 9 und 11 im Raume R_1.

Die Korrespondenz dieser 45 Zellen, welche sich mit Hilfe der am Anfang dieses § entwickelten geometrischen Untersuchungen in einfacher Weise herstellen läfst, lehrt folgende Tabelle:

0 reelle Wendepunkte			2 reelle Wendepunkte						6 reelle Wendepunkte	
$\overline{2}$	$\overline{2_{t'}}$	$\overline{12_t}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{11_t}$	$\overline{18_t}$	$\overline{11_u}$	$\overline{18_u}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$
$\overline{2}$	$\overline{12_{t'}}$	im.	$\overline{4}$	$\overline{5}$	im.	im.	$\overline{11_u}$	$\overline{18_u}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$
$\overline{12}$	$\overline{12_{t'}}$	im.	$\overline{11}$	$\overline{18}$	im.	im.	$\overline{11_u}$	$\overline{18_u}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$

4 reelle Wendepunkte										
$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{19_u}$	$\overline{19'_u}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\overline{19_t}$	$\overline{19_{t'}}$
$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{22}$	$\overline{22'}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	im.	im.
$\overline{19_a}$	$\overline{19_b}$	$\overline{23}$	$\overline{23'}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{20'}$	$\overline{21'}$	$\overline{19}$	im.	im.

Man kann nun auch vermöge der Transformationsgleichungen des § 4, (II) und (II′) zu jedem Zellentrippel des Raumes R_2 das korrespondierende Zellenpaar des Raumes R_1 aufsuchen und so eine Tabelle herstellen, aus der zu jeder vorgegebenen Wendepunktsgleichung die ihr zugehörigen fünf Zellen, d. h. wie wir in § 20 sehen werden, die ihr zugehörigen fünf Kurventypen unmittelbar entnommen werden können. Dabei zeigt sich in erster Linie, dafs nur denjenigen Punkten des Raumes R_2 im Raume R_1 reelle Punkte entsprechen, deren Koordinaten in T_2' substituiert, ein positives Substitutionsresultat liefern. Denn nur für solche Werte wird die Discriminante der dritten der Transformationsgleichungen (II), welche die Koordinaten y des gesuchten Punktepaares im Raume R_1 liefert, reell, und diese Discriminante ist gerade die Fläche

$$T_2' = \eta^2\xi^2 + 16\zeta\,(1 + 2\xi\zeta - \xi^3).$$

Ihr entspricht im Raume R_1 die Koincidenzfläche Q_2. Rückt also in R_2 ein Punkt $(\xi\eta\zeta)$ auf diese Fläche T_2', so rücken die beiden entsprechenden in R_1 in einen Punkt der Fläche Q_2 zusammen. Tritt alsdann $(\xi\eta\zeta)$ in das Innere der Fläche, so sind die ihm entsprechenden imaginär geworden. Den drei Zellentrippeln

$$\begin{array}{ccc} \overline{12_{t'}} & \overline{2_{t'}} & \overline{2_{t'}} \\ \overline{19} & \overline{19} & \overline{19} \\ \overline{19_{t'}} & \text{im.} & \text{im.,} \end{array}$$

welche einzig und allein innerhalb T_2' liegen, entsprechen daher im Raume R_1 drei imaginäre Zellen, wie oben behauptet wurde.

Im übrigen bietet die Aufsuchung von je fünf korrespondierenden Zellen auf Grund der beiden vorausgehenden Tabellen nur mehr rechnerische Schwierigkeiten. Das Resultat zeigt folgende Tabelle.

0 reelle Wendepunkte					2 reelle Wendepunkte							6 reelle Wendepunkte	
9_t	9_t	11_t	9	im.	10	1_t	1_{t^0}	1	3	3_t		5	12
9_t	11_t	11_t	11	im.	8_{t^0}	8_{t^0}	8_{t^0}	8	8	8_t		7	14
	$\overline{12}$ *)		$\overline{12_t}$	$\overline{12_{t'}}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$ *)		$\overline{18_t}$	$\overline{11_t}$	$\overline{11_u}$	$\overline{18_u}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$
	$\overline{2}$		im.	$\overline{2_{t'}}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$		im.	im.	$\overline{11_u}$	$\overline{18_u}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$
	$\overline{2}$		im.	$\overline{2_{t'}}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$		im.	im.	$\overline{11_u}$	$\overline{18_u}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$

4 reelle Wendepunkte												
4	2	4	4_t	4_{t^0}	6	13	15	17	19	21	im.	im.
4	2	2	2_t	2_{t^0}	6	13	16	18	20	22	im.	im.
	$\overline{19_t}$ *)		$\overline{19_a}$	$\overline{19_b}$	$\overline{19_u}$	$\overline{19'_u}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{20'}$	$\overline{21'}$	$\overline{19}$	im.
	im.		$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{22}$	$\overline{22'}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	19	im.
	im.		$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{23}$	$\overline{23'}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\overline{19_{t'}}$

§ 15. Die Doppelpunkts- und Doppeltangentenformen im Raume R_2.

Die Zellen der beiden Räume lassen sich nicht nur in Bezug auf die Wendepunkte charakterisieren, sondern auch ganz allgemein in Bezug auf die Realität der Doppelpunkte und Doppeltangenten, welche die durch die Koordinaten irgend eines Punktes bestimmte Kurve besitzt.

Die Parameter der Doppelpunkte und Doppeltangenten sind nämlich die gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungssysteme (D) und (T) des § 1, die wie erwähnt, schon aus irgend zwei Glei-

*) Die einzelnen Gebiete sind durch die Fläche $J_2 = 0$ getrennt zu denken, eine Trennung, die ich in der Tabelle nicht markieren wollte, weil diese Fläche für die späteren Untersuchungen keine Bedeutung hat.

chungen derselben erhalten werden können. Die Elimination der Parameterprodukte p aus ihnen, liefert für die Summen s der Doppeltangentenparameter eine biquadratische, für die s der Doppelpunktsparameter eine kubische Gleichung. Gemäfs unseren Voraussetzungen des § 3 mufs aber die biquadratische Gleichung für den Raum R_1 eine Wurzel $s = \infty + 0 = \infty$ haben, für den Raum R_2 zwei Wurzeln $s = 0$. Man kann daher im Raume R_2 alle vier Parametersummen s explizit ausdrücken durch α_i und β_i und da die vier Wurzelprodukte p ebenfalls eindeutig hiezu bestimmbar sind, so kann man sofort vier quadratische Formen

$$f_i \equiv \lambda^2 + s_i \lambda + p_i = 0, \; i = 1, 2, 3, 4$$

aufstellen, deren Koeffizienten Funktionen der Koordinaten $\xi\eta\zeta$ sind, und deren Wurzelpaare die Parameter der Berührpunkte der vier Doppeltangenten einer C^4 darstellen. Ich werde daher diese vier Formen kurz *Doppeltangentenformen* nennen und nunmehr zu ihrer Aufstellung übergehen.

Wir benützen aus dem System (T) die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_2 p^2 + 2\beta_4 p - \alpha_6 + 2p\beta_3 s + \beta_4 s^2 &= 0 \\ \alpha_3 p^2 + 2\alpha_5 p + 2\alpha_4 ps + 2\alpha_6 s + \alpha_5 s^2 &= 0 \end{aligned}$$

und eliminieren aus ihnen p; die Elimination liefert:

$$\begin{aligned} 4(\beta_2 s^3 + 2\beta_3 s^2 + (2\beta_4 + \alpha_4) s + \alpha_5)(\alpha_0 s + \alpha_1) \\ - (\alpha_1 s^2 + 2\alpha_2 s + \alpha_3)^2 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man hier wie im Raume R_2 erforderlich $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$, so scheidet sich der Faktor $s^2 = 0$ ab, und die beiden Wurzeln der restierenden quadratischen Gleichung sind:

$$s = \frac{-\beta_3 \pm \sqrt{\{\beta_3^2\alpha_0 - \beta_2 (2\beta_4\alpha_0 + \alpha_4\alpha_0 - \alpha_2^2)\}\frac{1}{\alpha_0}}}{\beta_2}$$

oder indem man hier β_2 und α_4 mit Hilfe

$$\begin{aligned} \alpha_0\beta_4 &= -\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_0\alpha_6 &= +\alpha_2\alpha_4 \end{aligned}$$

eliminiert:

$$\text{(I)} \qquad s = \frac{+\beta_3\alpha_2 \mp \sqrt{\beta_3^2\alpha_2^2 + \beta_4\{\alpha_0^2\alpha_6 + 2\alpha_0\alpha_2\beta_4 - \alpha_2^3\}}}{\alpha_0\beta_4}$$

Die zugehörigen Werte von p finden sich aus dem Gleichungssystem (T) sehr einfach. Denn indem man in diesen fünf Gleichungen von vornherein $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ setzt, reduzieren sich drei derselben auf

$$1)\quad 2\,(\alpha_0 p + \alpha_2)\,\alpha_4 s = 0$$
$$3)\quad 2\,(\alpha_0 p + \alpha_2)\,\beta_2 s = 0$$
$$5)\quad 2\,(\alpha_0 p + \alpha_2)\cdot s = 0$$

So lange also α_4, β_2 und insbesondere $s \gtrless 0$, verschwinden diese Gleichungen nur für

$$(II)\qquad p = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0};$$

man verifiziert leicht, dafs dieser Wert verbunden mit den beiden anderen von s, in der That auch die zwei übrigen der fünf Gleichungen befriedigt.

Ebenso einfach erhält man die zum Wertepaare $s = 0$ gehörigen Wertepaare p; denn indem man in den fünf Gleichungen $s = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ setzt, verschwinden 1) 3) und 5) und die beiden anderen werden:

$$2)\quad \alpha_2 p^2 + 2\beta_4 p - \alpha_6 = 0$$
$$4)\quad \alpha_0 p^2 - 2\beta_2 p - \alpha_4 = \frac{\alpha_0}{\alpha_2}\left\{\alpha_2 p^2 + 2\beta_4 p - \alpha_6\right\} = 0.$$

Die beiden zu $s = 0$ gehörigen Wurzeln sind:

$$(III)\qquad p = \frac{-\beta_4 \pm \sqrt{\beta_4^2 + \alpha_2\alpha_6}}{\alpha_2};$$

Führt man nun in die erhaltenen vier Wertpaare von p und s die Koordinaten $\xi\eta\zeta$ ein, indem man zugleich $\alpha_0 = \alpha_6 = 1$ setzt, und bildet alsdann mit jedem solchen Wertepaare eine quadratische Form f_i, so sind die 8 Berührpunkte der Doppeltangenten dargestellt durch:

$$A\begin{cases} f_1 \equiv \lambda^2 - \dfrac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 + \xi}}{\xi} \equiv \lambda^2 - \dfrac{\zeta - \sqrt{T_2}}{\xi} = 0 \\ f_2 \equiv \lambda^2 - \dfrac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \xi}}{\xi} \equiv \lambda^2 - \dfrac{\zeta + \sqrt{T_2}}{\xi} = 0 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} f_3 \equiv \lambda^2 - \dfrac{\eta\xi + \sqrt{\eta^2\xi^2 + 16\zeta(1 + 2\xi\zeta - \xi^3)}}{4\zeta}\lambda - \xi \equiv \lambda^2 - \dfrac{\eta\xi + \sqrt{T_2'}}{4\zeta}\lambda - \xi = 0 \\ f_4 \equiv \lambda^2 - \dfrac{\eta\xi - \sqrt{\eta^2\xi^2 + 16\zeta(1 + 2\xi\zeta - \xi^3)}}{4\zeta}\lambda - \xi \equiv \lambda^2 - \dfrac{\eta\xi - \sqrt{T_2'}}{4\zeta}\lambda - \xi = 0 \end{cases}$$

Man kann nun mit ihrer Hilfe leicht, wie früher für die Wendepunktsform, die Realität der Doppeltangenten für die einzelnen Zellen diskutieren.

So lange insbesondere T_2 und T_2' positiv, sind die Koefficienten der Formen f_i reell, und deren Wurzeln entweder selbst reell oder

doch *konjugiert* imaginär, also auch die Doppeltangenten reell berührend oder isoliert.

Für $T_2 = 0$, oder $T_2' = 0$ werden die Formen A, resp. B identisch, d. h. für Punkte dieser Flächen erhält man Kurven mit einem Paar zusammenfallender Doppeltangenten. Dieses Zusammenfallen *zweier* Doppeltangenten tritt immer ein bei Kurven C^4 mit *Selbstberührungs*punkten; ich habe daher diese Flächen *Taktflächen* genannt, da nur für ihre Punkte Kurven mit Selbstberührungspunkten auftreten *können*.

Werden endlich T_2 und T_2' negativ, so sind die Koeffizienten von f_i imaginär, aber so, dafs entsprechende Koeffizienten zweier Formen A oder B *konjugiert* sind. Infolge dessen sind auch die Wurzeln der beiden Formen A oder B kreuzweise konjugiert imaginär, die Berührsehnen der durch solche zwei Formen dargestellten *konjugiert imaginären Doppeltangenten* also reell.

Durchschreitet der Punkt $(\xi\eta\zeta)$ die Flächen $T_2 = 0$ und $T_2' = 0$, so werden zwei reelle oder isolierte Doppeltangenten der zum Punkte gehörigen Kurve C^4 imaginär.

Ich gehe nun daran, die Doppelpunktsformen $\varphi_i = 0$ explizit aufzustellen. Dafs dies überhaupt möglich ist, erkennt man zunächst aus Folgendem. Herr Prof. Brill hat im 20ten Bd. d. Math. Annal. gezeigt, dafs die Doppeltangenten- und Doppelpunktsformen zusammenhängen durch die Relationen:

$$\begin{aligned} f_2 + f_3 &\equiv 2\varphi_1 \cdot C_1 \\ f_3 + f_1 &\equiv 2\varphi_2 \cdot C_2 \\ f_1 + f_2 &\equiv 2\varphi_3 \cdot C_3 \end{aligned}$$

wo die C_1, C_2, C_3 Konstante und die Formen f_i und φ_i noch in einer bestimmten Weise normiert sind.

Da aber in unserm Falle stets zwei der Formen $f_i = 0$ *rein* quadratische Gleichungen in λ sind, so mufs bei mindestens einer der drei Doppelpunktsformen $\varphi_i = 0$ gleichfalls der Koeffizient von λ^1 null sein, also die Summe s beider Wurzeln verschwinden.

Wenn man also aus den drei Gleichungen des Systemes (D) das Produkt p der Wurzelpaare eliminiert, so resultiert notwendig eine Gleichung 3ten Grades für s, welche die Wurzel $s=0$ aufweisen mufs.

Setzt man nun aber, wie dies ja der Raum R_2 erfordert, a priori in den drei Gleichungen (D) $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$, so erhält man:

$$(D') \quad \begin{cases} p^2\alpha_0 + p(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_4 + s\beta_3 + s^2\beta_2 = 0 \\ s \cdot \{p(\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_4 + \beta_4) + s\beta_3\} = 0 \\ p^2\beta_2 + p(s\beta_3 + \alpha_4 - \beta_4) + \alpha_6 + s^2\beta_4 = 0 \end{cases}$$

Es gibt sich also in der That die Lösung $s = 0$ bereits in der zweiten Gleichung zu erkennen, und da die vorige Überlegung sie *notwendig* als zum *gemeinschaftlichen* System der Lösungen gehörig erkennen liefs, so kann man gleich den dazu gehörigen Wert p bestimmen, indem man im ganzen System (D') die Wurzel s gleich null setzt.

Die erste und dritte Gleichung reduzieren sich dann auf:

$$1) \quad p^2\alpha_0 + p\,(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_4 = 0$$
$$3) \quad p^2\beta_2 + p\,(\alpha_4 - \beta_4) + \alpha_6 = 0$$

Die Resultante R beider Gleichungen mufs verschwinden und man erhält nach einem bekannten Satze*) die gemeinschaftliche Lösung derselben aus dem Quotienten von $\frac{\partial R}{\partial \alpha_0}$ und $\frac{\partial R}{\partial(\alpha_2 - \beta_2)}$. Man findet auf diese Weise sehr einfach als gemeinschaftliche Wurzel:

$$p_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0}.$$

Es ist also die erste Doppelpunktsform bereits erhalten, sie lautet:

$$\varphi_1 \equiv \lambda^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}.$$

Die beiden anderen Formen sind freilich wesentlich komplizierter. Ich ermittle zuerst die beiden Werte p_2 und p_3, indem ich aus den drei in s^2, s, 1 homogenen Gleichungen des Systemes (D') diese drei Gröfsen eliminiere, und aus der so erhaltenen Determinante die Lösung $p + \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$ absondere. Die Eliminationsgleichung ist, wenn $r = p(\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_4 + \beta_4)$:

$$0 = \begin{vmatrix} \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 + p(\alpha_2 - \beta_2) + p^2\alpha_0 \\ \beta_3, & r, & 0 \\ \beta_4, & p\beta_3, & \alpha_6 + p(\alpha_4 - \beta_4) + p^2\beta_2 \end{vmatrix}$$

Dividiert man die dritte Vertikalreihe durch $\alpha_0 p + \alpha_2$, indem man sie vorher noch mit α_0 multipliziert, so erhält man:

$$0 = \begin{vmatrix} \beta_2, & \beta_3, & p\alpha_0 - \beta_2 \\ \beta_3, & r, & 0 \\ \beta_4, & p\beta_3, & p\beta_2 + \alpha_4 \end{vmatrix}$$

*) Vergl. die von mir herausgegebenen Vorlesungen Gordans S. 192, Bd. I, oder Salmon, Algebra der linearen Transformationen, S. 111.

Die Entwicklung dieser Determinante nach Potenzen von p gibt unter Beachtung der Identität

$$\alpha_2\beta_2 + \alpha_0\beta_4 = 0:$$

$$p^2\{\alpha_0\beta_3^2 + \beta_2(\alpha_2+\beta_2)^2\} - 2\beta_2 p\{\beta_3^2 - (\alpha_2+\beta_2)(\alpha_4+\beta_4)\} + \beta_2(\alpha_4+\beta_4)^2 - \alpha_4\beta_3^2 = 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung:

$$\Delta(p) \equiv \{\alpha_0\beta_3^2 + \beta_2(\alpha_2+\beta_2)^2\}\{\alpha_4\beta_3^2 - \beta_2(\alpha_4+\beta_4)^2\} + \beta_2^2\{\beta_3^2 - (\alpha_2+\beta_2)(\alpha_4+\beta_4)\}^2$$

läfst sich auf folgende elegante Form bringen:

$$\Delta(p) \equiv \frac{\beta_3^2\alpha_0^2}{\alpha_2^4}\left\{\alpha_6\alpha_2 + \beta_4^2\right\}\left\{\beta_3^2\alpha_2^2 + \beta_4(\alpha_0^2\alpha_6 + 2\alpha_0\alpha_2\beta_4 - \alpha_2^3)\right\}$$

In den beiden Klammerfaktoren erkennt man sofort wieder die beiden Taktinvarianten T_2 und T_2'.

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung in p sind somit:

$$p = \frac{-\beta_4\{\beta_3^2\alpha_2^2 - MN\} \pm \beta_3\alpha_2\sqrt{T_2\cdot T_2'}}{\beta_3^2\alpha_2^3 - \beta_4 M^2}$$

wobei $M \equiv (\alpha_2^2 - \alpha_0\beta_4)$, $N \equiv (\alpha_0\alpha_6 + \alpha_2\beta_4)$.

Hiezu bestimmt sich der zugehörige Wert von s linear aus der zweiten der drei Gleichungen (D'):

$$-s = \frac{+(pM+N)}{\alpha_2\beta_3}$$

$$\text{oder } -s = \frac{\alpha_0\alpha_2\beta_3\cdot T_2 \pm M\sqrt{T_2\cdot T_2'}}{\alpha_2^3\beta_3^2 - \beta_4 M^2}$$

Führt man nun vollends die Koordinaten des Raumes R_2 ein, wie im Falle der Doppeltangenten, und bildet dann die quadratischen Doppelpunktsformen, so kommt:

$$(A_1) \qquad \varphi_1 \equiv \lambda^2 - \xi$$

$$(B_1)\ \varphi_2 \text{ und } \varphi_3 \equiv \lambda^2 + \frac{4(\eta\xi T_2 \mp M\sqrt{T_2\cdot T_2'})}{\eta^2\xi^3 - 16\zeta M^2}\cdot\lambda - \frac{\zeta(\eta^2\xi^2 - 16MN) \pm \eta\xi\sqrt{T_2\cdot T_2'}}{\eta^2\xi^3 - 16\zeta M^2},$$

wobei:

$$T_2 = \zeta^2 + \xi$$
$$T_2' = \eta^2\xi^2 + 16\zeta(1 + 2\xi\zeta - \xi^3)$$
$$M = \xi^2 - \zeta, \qquad N = 1 + \xi\zeta.$$

Es sind also auch für die beiden Formen φ_2 und φ_3 die Koefficienten nur dann imaginär, wenn entweder T_2 oder $T_2' < 0$. Das war von vornherein abzusehen; denn mit dem Imaginärwerden zweier Doppeltangenten verschwinden notwendig auch zwei Doppelpunkte.

Die 7 quadratischen Formen A, B, C, D gestatten nun in einfacher Weise die jeder Zelle des Raumes R_2 zukommenden Kurvensingularitäten zu bestimmen. Das Resultat lehrt die folgende Tabelle:

Reelle Wendepunkte	Zellen	Doppelpunkte			Doppeltangenten			Typus auf Taf. III
		reell	isoliert	imag.	reell	isoliert	imag.	
0	$\overline{2}$	3	—	—	3	1	—	1, 2, 3
	$\overline{2_t}$	1	—	2	1	1	2	21
	$\overline{12}$	—	3	—	—	4	—	13
	$\overline{12_t}$, $\overline{12_{t'}}$	—	1	2	—	2	2	19
2	$\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{11_u}$, $\overline{18_u}$	2	1	—	3	1	—	9
	$\overline{11}$, $\overline{18}$	—	3	—	1	3	—	14
	$\overline{11_t}$, $\overline{18_t}$	—	1	2	1	1	2	18
4	1, $\overline{3}$, 7, 8, $\overline{14}$, $\overline{15}$	1	2	—	3	1	—	11
	$\overline{19_u}$, $\overline{19_{u'}}$, $\overline{19_a}$, $\overline{19_b}$,	—	3	—	2	2	—	15
	$\overline{19}$, $\overline{19_t}$	—	1	2	2	—	2	17, 21_a
	$\overline{19_{t'}}$	2	1	—	—	—	4	23
	$\overline{20}$ bis $\overline{23}$, $\overline{20'}$ bis $\overline{23'}$	2	1	—	4	—	—	8
6	$\overline{10}$, $\overline{17}$	—	3	—	3	1	—	16
	$\overline{6}$, $\overline{9}$ $\overline{13}$, $\overline{16}$	1	2	—	4	—	—	10

Als ausgeschlossen erscheinen zehn Kurventypen mit zwei reellen Wendepunkten, nämlich die Typen: 4, 5, 6, 7, 12, 20, 22, 24, 25, 26 auf Taf. III.

Die expliciten quadratischen Formen f_i φ_i gestatten unter anderm auch begreiflicher Weise leicht das Verfolgen der Übergänge rationaler C^4 ineinander; insbesondere bieten sie *wesentliche Vorteile für das Studium der C^4, welche imaginäre Doppelpunkte und Doppeltangenten besitzen.*

Anmerkung 1: Die drei Formen φ_1, f_1 und f_2 repräsentieren drei Paar Parameterwerte λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, welche der Bedingung genügen:

$(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_5) = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_6)$

d. h. da keine der 7 Formen f_i und φ_i ausgezeichnet sein kann:

„Das Parameterpaar eines Doppelpunktes liegt mit den Parameterpaaren zweier bestimmter Doppeltangenten involutorisch."

Anmerkung 2: Bildet man das Produkt der Discriminanten der Formen f_i einerseits und das der Formen φ_i anderseits, (nachdem man die Formen mit dem Hauptnenner der einzelnen Koefficienten multipliziert hat) so erhält man gerade in den gleich null gesetzten Produkten

$$\xi^3 = 0,\ U_2 = 0$$
$$\xi = 0,\ C_2 = 0,\ \text{d. h.}$$

die Cuspidal- und Undulationsfläche, was von vornherein zu erwarten war.

Man hätte also auch auf diesem Wege diese Flächen aufstellen können, der zugleich die beiden anderen wichtigen Flächen T_2 und T_2' liefert.

§ 16. Die Doppelpunkts- und Doppeltangentenformen im Raume R_1.

Für den Raum R_1 gelingt es nun allerdings nicht, die quadratischen Doppelpunkts- und Doppeltangentenformen allgemein aufzustellen. Da indes die Ebene $x = z$ alle Zellen, so weit sie durch C_1 und U_1 gebildet werden, durchsetzt und überdies für $x = z$ die beiden kubischen Gleichungen für die Produkte der Doppelpunkts- und Doppeltangentenparameter reciprok werden, so lassen sich zunächst wenigstens für diese Zellen die sieben quadratischen Formen explicit darstellen.

Eliminiert man nämlich aus den drei Gleichungen des Systemes (D) die Variable s, so erhält man unter Berücksichtigung dessen, dafs im Raume R_1 insbesondere

$$\alpha_1 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = 0$$

zu setzen ist:

$$D(p) \equiv \begin{vmatrix} 0 & \beta_3 & \alpha_2 p + \alpha_0 p^2 \\ \beta_3 & \alpha_4 + \alpha_2 p & \alpha_3 p \\ 0 & \beta_3 p & \alpha_6 + \alpha_4 p \end{vmatrix}$$
$$= \beta_3^2 \{\alpha_0 p^3 + \alpha_2 p^2 - \alpha_4 p - \alpha_6\} = 0.$$

Ganz ebenso erhält man durch Elimination von s aus zweien der fünf Gleichungen des Systemes (T)

$$T(p) \equiv 2\beta_3 \{\alpha_0 p^3 + \alpha_2 p^2 - \alpha_4 p - \alpha_6\} = 0.$$

Die Produkte p der Doppeltangentenparameter und der Doppelpunktsparameter haben also bei ein- und derselben Kurve den nämlichen Wert; die Parameterpaare selbst gehören also, wie man leicht mit Hilfe der v. Staudt'schen Wurfrechnung erkennt, *ein- und derselben Involution an, die a priori gegeben ist durch die vier Punkte:*

$$1,\ p,\ 0 \text{ und } \infty.$$

Führt man in $T(p)$ oder $D(p)$ dann die Koordinaten des Raumes R_1 ein, so erhält man:

$$D(p)^*) = p^3 + xp^2 - zp - 1 = 0,$$

und wenn man nun vollends $x = z$ setzt, so kommt:

$$(p - 1)(p^2 + (x + 1)p + 1) = 0.$$

Hiezu bestimmen sich linear die Wurzelsummen s für die Doppelpunkte aus

$$s_d = \frac{-4p(p + x)}{y}$$

und für die Doppeltangenten aus

$$s_t = \frac{2(p - x)}{y}.$$

Die quadratischen Formen für diese Ebene $x = z$ im Raume R_1 werden also:

$$(E)\quad \varphi_1 = \lambda^2 + \frac{4(x + 1)}{y}\lambda + 1 = 0$$

$$(F)\begin{cases} \varphi_2 = \lambda^2 - \frac{2}{y}\{1 - x + \sqrt{(x+1)^2 - 4}\}\lambda - \frac{(x+1) - \sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} = 0 \\ \varphi_3 = \lambda^2 - \frac{2}{y}\{1 - x + \sqrt{(x-1)^2 - 4}\}\lambda - \frac{(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$(G)\begin{cases} f_1 \equiv \lambda = 0 \\ f_2 \equiv \lambda^2 - \frac{2(1 - x)}{y}\lambda + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(H)\begin{cases} f_3 = \lambda^2 - \frac{(x+1)}{y}\{x - 1 + \sqrt{(x+1)^2 - 4}\}\lambda - \frac{x+1 - \sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} = 0 \\ f_4 = \lambda^2 - \frac{x+1}{y}\{x - 1 + \sqrt{(x+1)^2 - 4}\}\lambda - \frac{x+1 + \sqrt{(x+1)^2 - 4}}{2} = 0 \end{cases}$$

Diese 7 Formen reichen völlig aus, die sämtlichen Zellen des Raumes R_1 zu diskutieren.

Man braucht sogar nur für ein paar Zellen wirkliche Zahlenbeispiele zu bilden; der Charakter aller andern ergibt sich dann aus der Überlegung, dafs beim Durchschreiten einer der Flächen eine entsprechende Singularität verloren geht, oder neu hinzutritt.

Das Resultat der Untersuchung gibt folgende Tabelle:

*) Man beachte, dafs die Discriminante dieser Gleichung die Taktfläche T_1 liefert; dies ist a priori einzusehen, da in einen Selbstberührungspunkt stets zwei Doppelpunkte zusammen rücken.

Reelle Wendepunkte	Zellen	Doppelpunkte			Doppeltangenten			Typus (Tafel III)
		reell	isoliert	imag.	reell	isoliert	imag.	
0	9_t 11_t	3	—	—	3	1	—	1 2 3
	9 11	1	—	2	1	1	2	21
2	8_{t^0}	2	1	—	3	1	—	9
	8	—	1	2	1	1	2	18
	8_t	—	3	—	1	3	—	14
	1 3	1	—	2	2	—	2	22
	1_t 3_t	3	—	—	4	—	—	7
	10_t 1_{t^0}	3	—	—	4	—	—	4 5 6
4	2 4	—	1	2	2	—	2	17 21_a
	2_t 4_t 2_{t^0} 4_{t^0} 15 17 19 21	2	1	—	4	—	—	8
	16 18 20 22	—	3	—	2	2	—	15
	6 13	1	2	—	3	1	—	11
6	5 14	1	2	—	4	—	—	10
	7 12	—	3	—	3	1	—	16

Es sei hier insbesondere auf die drei Typen 4, 5, 6 aufmerksam gemacht, welche drei reelle Doppelpunkte und vier reelle Doppeltangenten besitzen, aus denen sich in der That zeigt, dafs diese Kurven *zwei reelle Wendepunkte* haben können, was bisher noch nicht erwiesen war. Aus den Betrachtungen schliefst sich ferner die Kurve mit dreifachem Punkte keineswegs aus, sondern stellt sich einfach in den Zellen 9_t 11_t 1_{t^0} und 10_t als Übergangstypus dar.*) Dagegen ist der ganz gleich charakterisierte Typus 7 auf eigene Zellen (1_t und 3_t) beschränkt; man kann leicht verfolgen, wie derselbe allmählich in die Typen 1 bis 6 übergeführt wird.

Völlig ausgeschlossen zeigen sich neun Typen der Tafel III; es sind das die vier Typen mit imaginären Doppeltangenten, deren Fehlen a priori zu erwarten war, da wir in R_1 die Berührpunkte 0 und ∞ adjungiert hatten, und ferner die fünf Typen 12, 13, 19, 20 und 22, die, wie wir später sehen werden, in Folge der Beschränkung $\alpha_0 = 1$ nicht auftreten.

Man könnte nun wieder, wie im ersten Teile, die einzelnen Zellen dieser Tabelle sowol als der des Raumes R_2 durch Vorzeichenkombinationen von Invarianten charakterisieren und so allgemeine analytische Kriterien für die Kurvensingularitäten gewinnen.

*) Er findet sich im ganzen Raume R_1 in den Ebenen $y = \pm 4$, vgl. § 20.

Ich habe diese Aufgabe unter Einführung von vier weiteren Cylinderflächen in beiden Räumen durchgeführt, sehe aber von der Publikation des Resultates ab, da dasselbe keineswegs die einfache Übersicht gewährt wie die beiden obigen Tabellen. Für die Hauptfälle indes werde ich die analytischen Kriterien am Schlusse dieser Abhandlung beifügen.

§ 17. Über das Wesen der Bedingung $\alpha_0 = 1$.

Die Wahl dreier Doppeltangenten als Koordinatendreieck, sowie die Kurventransformationen, in Folge deren die durch zwei Paar Doppeltangentenparameter bestimmte Involution die reellen Doppelpunkte 0 und ∞ endlich erhielt, bewirkten, dafs sich die Doppeltangenten- und Doppelpunktsformen explicit in der Gestalt darstellen liefsen:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} f_i = \lambda^2 - (\beta_4 \pm \sqrt{T_2}) : \alpha_2 & i = 1, 2 \\ f_k = \lambda^2 - \dfrac{(\alpha_2\beta_3 \pm \sqrt{T_2'})}{\alpha_0\beta_4}\cdot\lambda - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_0} & k = 3, 4 \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \lambda^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$$

$$\varphi_i = \lambda^2 + \frac{(\alpha_0\alpha_2\beta_3 T_2 \pm M\sqrt{T_2\cdot T_2'})}{\alpha_2^3\beta_3^2 - \beta_4 M^2}\cdot\lambda - \frac{\beta_4(\alpha_2^2\beta_3^2 - MN) \mp \alpha_2\beta_3\sqrt{T_2\cdot T_2'}}{\alpha_2^3\beta_3^2 - \beta_4 M^2},$$

wobei: $T_2 = \beta_4^2 + \alpha_2\alpha_6$, $M = \alpha_2^2 - \alpha_0\beta_4$, $N = \alpha_0\alpha_6 + \alpha_2\beta_4$
$T_2' = \alpha_2^2\beta_3^2 + \beta_4(\alpha_0^2\alpha_6 + 2\alpha_0\alpha_2\beta_4 - \alpha_2^3)$.

Die Koefficienten aller 7 Formen sind *homogene* Funktionen der α_i, β_i und durchwegs vom Gewichte 2, wenn man den Exponenten der zugehörigen Potenz von λ addiert. Man kann etwa α_6 durch Division entfernen; dann bleiben noch vier willkürliche Gröfsen

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_6} = \alpha_2', \frac{\beta_3}{\alpha_6} = \beta_3', \frac{\beta_4}{\alpha_6} = \beta_4', \frac{\alpha_0}{\alpha_6} = \alpha_0'.$$

Diese vier Gröfsen setzen sich aus den vier Konstanten der drei Doppeltangentenformen (vergl. § 2)

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} f_1 = \lambda^2 + b \\ f_2 = \lambda^2 + d \\ f_3 = \lambda^2 + e\lambda + f \end{cases}$$

in der Weise zusammen, dafs sie als die dreigliedrigen Determinanten der Koefficienten von f_1^2, f_2^2, f_3^2 hergestellt werden können (vergl. § 2). Für die Gröfse α_0' erhält man so unmittelbar den Wert:

$$\alpha_0' = \frac{\alpha_0}{\alpha_6} = \frac{1}{bdf}, \text{ d. h.}$$

α_0' ist der reciproke Wert des Produktes der sechs Berührpunktsparameter derjenigen drei Doppeltangenten, welche das Koordinatendreieck bilden. Setzt man nun, wie wir dies bisher gethan haben $\alpha_0' = 1$, so ergibt sich hieraus die Relation

$$bdf = 1,$$

welche im allgemeinen nicht erfüllt ist, und welcher zufolge eine Reihe von Kurventypen von unseren Betrachtungen ausgeschlossen war. Der Grund liegt weniger in der Beschränkung $\alpha_0' = 1$, als vielmehr in $\alpha_0 = +$ Konst.; die fehlenden Kurventypen stellen sich ein, sobald wir setzen: $\alpha_0 = -$ Konst.

Ich werde demnach im Folgenden α_0' als von 1 verschieden annehmen, mich jedoch auf die Diskussion des Raumes R_2 beschränken. Hiebei sind drei Fälle auseinander zu halten:

$$\alpha_0' = + \text{ Konst.}, \quad \alpha_0' = 0, \quad \alpha_0' = - \text{ Konst.}$$

§ 18. Diskussion des Raumes R_2 für $\alpha_0 \geqq 0$.

Die Formen C_2, U_2, T_2 und T_2' sind Kombinanten und als solche von konstantem Gewichte und von homogener Form. Daher läfst sich ihre Darstellung in den Gröfsen α_i, β_i leicht aus der früheren in ξ, η, ζ rekonstruieren. Man erhält:

$$\begin{aligned}
C_2 &= [\{\eta^2\xi^3\alpha_6 + 4(\alpha_0^2\alpha_6 - \xi^3)(3\xi\alpha_6 - \zeta^2)\zeta - 8\alpha_0\alpha_6\xi^2(\alpha_6\xi - 3\zeta^2)\}^2 \\
&\quad - 16\{\zeta^2 + \alpha_6\xi\}^3\{\alpha_0^2\alpha_6 + \xi^3\}^2]\cdot\alpha_0^4 \\
U_2 &= \{\eta^2\xi^3\alpha_0 + (\xi^3 - 6\alpha_0\xi\zeta - \alpha_0^2\alpha_6)^2\}\cdot\xi\alpha_6 \\
T_2 &= \zeta^2 + \alpha_6\xi \\
T_2' &= \eta^2\xi^2 + 16\zeta(\alpha_0^2\alpha_6 + 2\alpha_0\xi\zeta - \xi^3),
\end{aligned}$$

wobei $\eta = 4\beta_3$, $\zeta = \beta_4$ und $\xi = \alpha_2$ ist. Bei der Homogenität dieser Formen in α_i, β_i ist es erlaubt, eine dieser Gröfsen $= 1$ zu setzen; ich wähle $\alpha_6 = 1$.

Die Fragen, welche wir zu entscheiden haben, lauten:

Bleiben alle Berührungs- und Durchdringungskurven der vier Flächen für $\alpha_0 > 0$ erhalten, wie gestaltet sich alsdann der reelle und isolierte Verlauf der Doppelkurven von C_2 und U_2, und endlich, treten neue Durchdringungs- oder Doppelkurven auf? Was nun die beiden Flächen C_2 und U_2 betrifft, so zeigen einfache rechnerische Überlegungen, dafs für wachsende Werte von $\alpha_0 > 0$ eine wesentliche Änderung in der Einteilung des Raumes R_2 nicht ein-

tritt; die Zellen werden lediglich deformiert, aber ihre Anzahl bleibt unverändert, *wie wir dies auch für Werte von* $\alpha_0 < 0$ *in* § *19 zeigen werden.* Es bleiben also die Doppelkurven P_2', U_{2d}, C_{2d} und die Durchdringungskurven Θ_2 und P_2'' nach wie vor erhalten, ohne dafs neue derartige Kurven hinzutreten. Dies gilt auch für die Flächen T_2 und T_2' unter sich. Zunächst treffen sich T_2 und T_2' in der Rückkehrkante von C_2 und da eine Rückkehrkante niemals isoliert oder imaginär werden kann, so bleibt die Durchdringungskurve von T_2 und T_2'

$$\Theta_{2a} = \zeta \cdot \{\eta^2 \zeta^3 + 16(\alpha_0 - \zeta^3)^2\} = 0,$$

welche in der Ebene $\eta = 0$ den isolierten Berührpunkt $\zeta = \sqrt[3]{\alpha_0}$ aufweist, für alle Werte $\alpha_0 \leq 0$ erhalten, wie auch aus dieser Gleichung ersichtlich ist. In einer weiteren Kurve treffen sich T_2 und T_2' nicht mehr. Dagegen berührt T_2' die Flächen U_2 und C_2 längs der Oskulationskurve

$$T_2' = 0, \; Q_2 = \xi^3 + 2\alpha_0 \xi\zeta - \alpha_0^2$$

(vergl. § 9), die ich mit Θ_2 bezeichnet habe, auch sie bleibt erhalten für $\alpha_0 \gtrless 0$. Nur die einzige Durchdringungskurve von U_2 und T_2

$$-\alpha_0 \eta^2 \zeta^6 + (\zeta^6 + 6\alpha_0 \zeta^3 - \alpha_0^2)^2 = 0$$

wird, wie man sieht, für negative Werte von α_0 imaginär, während für positive Werte auch sie nicht verschwindet.

Es bleiben also jedenfalls für $0 < \alpha_0 > \infty$ die 45 Zellen des Raumes R_2 mit den ihnen anhaftenden invarianten Eigenschaften und Realitätsverhältnissen der Singularitäten erhalten, wenn sie auch ständig deformiert werden. Auch die Korrespondenz dieser Zellen bleibt dieselbe; denn die Ebene

$$f(a) = a^2 \xi + 2\alpha_0 a \zeta - \alpha_0^2 \alpha_6,$$

welche im Raume R_2 der Ebene $\xi = a$ entspricht (vergl. § 13, IV), bleibt immer noch Tangente des parabolischen Cylinders T_2 und der wachsende Parameter α_0 beeinflufst nur die Abrollungsgeschwindigkeit der Tangentialebene auf dem Cylinder.

Ist nun $\alpha_0 = 0$, so verschwindet zunächst wegen der Identitäten § 1, (III)

$$\alpha_0 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_4 = 0,$$
$$\alpha_0 \beta_4 + \alpha_2 \beta_2 = 0$$

auch α_2 und damit werden alle bisher aufgestellten Gleichungen illusorisch: sie verschwinden mit samt der Wendepunktsform identisch bis auf die Form T_2, welche sich auf β_4 reduziert. Führt man aber in die allgemeine Wendepunktsform $W(\lambda) = 0$ des § 1 die Werte $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ ein, so reduziert sie sich auf

$$W(\lambda) = 12\lambda^4 + 4u\lambda^3 + 6v\lambda^2 - vw$$

wobei, was wegen der Homogeneität erlaubt ist $\beta_2 = 1$,

$$4\beta_3 = u,\ 2\beta_4 = v,\ \alpha_4 = w$$

und statt α_6 vermöge der noch übrig bleibenden Relation

$$\beta_2\alpha_6 + \beta_4\alpha_4 = 0$$

$-\alpha_4\beta_4$ gesetzt wurde. Die Kurve C^4 wird also von der unendlichen fernen Geraden in zwei Wendepunkten geschnitten. Sucht man nun die gemeinschaftlichen Lösungen für die Produkte p und Summen s der Berührpunktsparameter der Doppeltangenten aus dem System der fünf Gleichungen (T) § 1, so ergibt sich zunächst:

$$s_2 = 0,\ p_2 = -\frac{\alpha_4}{2\beta_2}$$

$$s_3 = \frac{-\beta_3 + \sqrt{\beta_3^2 - \beta_2(\alpha_4 + 2\beta_4)}}{\beta_2},\ p_3 = \frac{\beta_4}{\beta_2}$$

$$s_4 = \frac{-\beta_3 - \sqrt{\beta_3^2 - \beta_2(\alpha_4 + 2\beta_4)}}{\beta_2},\ p_4 = \frac{\beta_4}{\beta_2}$$

Da nun im Raume R_2 die Doppeltangentenformen die Gestalten

$$f_1 = \lambda^2 + b$$
$$f_2 = \lambda^2 + d$$
$$f_3 = \lambda^2 + e\lambda + f$$

besitzen, so ist auch $s_1 = 0$; erhebt man also diese drei Formen ins Quadrat und berechnet $\alpha_0 = 0$, so findet man:

$$\alpha_0 = 4ef(b - d) = 0,$$

d. h. weil e und f nicht verschwinden, so ist $d = b = p_1$, und demnach auch $f_1 = f_2$.

Einen *Selbstberührungspunkt* kann die C^4 erhalten, wenn:

$$T_2' = \beta_3^2 - \beta_2(\alpha_4 + 2\beta_4) = \frac{1}{16}\{u^2 - 16(v + w)\} = 0.$$

Diese Fläche T_2' ist ein parabolischer Cylinder mit der Scheiteltangentialebene $v + w = 0$. Damit für $T_2' = 0$ die C^4 *wirklich einen Selbstberührungspunkt oder zwei consecutive isolierte Doppelpunkte* erhalte, hat man nur zu untersuchen, ob zwei Formen f_i unter sich und mit zwei Formen φ_i für $T_2' = 0$ zusammenfallen. Dies tritt in der That hier ein, wie wir an den sofort aufzustellenden Doppelpunktsformen erkennen.

Die Undulationsfläche liefert uns das Produkt der Discriminanten von f_3 und f_4. Man erhält nach einfachen Reduktionen die Gleichung:

$$U_2{}^*) = \{u^2 - 8\,(w + 3\,v)\}^2 - u^2\,(u^2 - 16\,(w + v)) = 0$$

oder

$$U_2 \quad = \quad u^2 v - 2\,(w + 3\,v)^2 = 0.$$

Ebenso erhalten wir die Cuspidalfläche als das Discriminantenprodukt der Doppelpunktsformen. Man findet als gemeinschaftliches Lösungssystem der drei Gleichungen (D) des § 1.

$$s_1 = 0 \qquad p_1 = \frac{\beta_4}{\beta_2}$$

$$s_2 = \frac{-\beta_3 + \sqrt{T_2'}}{\beta_2},\ p_2 = \frac{T_2' + \beta_2\beta_4 - \beta_3\sqrt{T_2'}}{\beta_2^2}$$

$$s_3 = \frac{-\beta_3 - \sqrt{T_2'}}{\beta_2},\ p_3 = \frac{T_2' + \beta_2\beta_4 + \beta_3\sqrt{T_2'}}{\beta_2^2}.$$

Berechnet man aus dem zweiten und dritten Wertsystem die Discriminante, so ergibt sich (von einem numerischen Faktor abgesehen)

$$C_2{}^{**}) = \{u^2 - 8\,(3\,w + v)\}^2 - u^2\,(u^2 - 16\,(w + v)) = 0$$

oder

$$C_2 \quad = u^2 w - 2\,(3\,w + v)^2 = 0.$$

Diese äufserst einfachen Gleichungen für die Flächen T_2', U_2 und C_2 setzen einer eingehenden Diskussion der hieher gehörigen C^4 keine weitern Schwierigkeiten mehr entgegen. Doch will ich von ihr an dieser Stelle absehen, da die hier auftretenden Kurventypen auch für $\alpha_0 \gtrless 0$ im Raume R_2 ihre Repräsentanten haben.

§. 19. Diskussion des Raumes R_2 für $\alpha_0 < 0$.

Wird nun $\alpha_0 < 0$, so bleiben zwar alle Durchdringungs-, Doppel- und Berührungskurven mit Ausnahme einer von T_2 und U_2 erhalten, aber die Zellengruppierung mufs gleichzeitig mit der nunmehr eintretenden Änderung des reellen bezw. isolierten Verlaufes der Doppelkurven eine andere werden, abgesehen davon, dafs eine Anzahl von Zellen verschwindet infolge des Imaginärwerdens der oben erwähnten Durchdringungskurve.

Die Untersuchung beginnen wir am einfachsten mit der Fläche $U_2 = 0$. Sie bleibt, wie man aus ihrer Gleichung ersieht, noch immer Regelfläche, ist aber, gerade im Gegensatz zu früher, nur mehr reell auf dem Gebiete der positiven ξ. Der für positive α_0

*) Hiezu gehört noch $\alpha_4 = w = 0$, wegen der Formen f_1 und f_2.

**) Hiezu gehört noch $2\,\beta_4 = v = 0$, wegen der Form φ_1.

isolierte (in Figur 3, Tafel IV) punktierte Zug $A\,B$ der Doppelkurve U_{2d} hat nun zwei reelle Mäntel, während der andere Zug isoliert ist.

Gleichzeitig ist die Doppelkurve in ihr Spiegelbild bezüglich der ξ-Axe übergegangen. *Zwei sich schneidende Ebenen*, deren in $\eta = 0$ gelegene Schnittlinie man in den Zug $A\,B$ deformiert, geben ein hinreichend anschauliches Bild der durch die Fläche U_2 erzeugten Zellen.

Ebenso wie mit $\alpha_0 = -$ konst. die Doppelkurve von U_2 in eine zu der im Falle $\alpha_0 = +$ konst. symmetrisch gelegene überging, wird auch die Doppelkurve von C_2 in $\eta = 0$, symmetrisch zu den Lagen bei positiven α_0 (Spiegelbild von Fig. 6, Tafel IV, an der Axe $\xi = 0$). Man erkennt auch aus der Gleichung von C_2 das Vorhandensein der Rückkehrkante und der zweiten Doppelkurve. Erstere liegt noch immer auch auf den beiden Flächen $T_2 = 0$ und $T_2' = 0$, letztere stets in der Ebene $\xi = -\sqrt[3]{\alpha_0^2}$.

Da die Rückkehrkante nicht isoliert sein kann, so mufs die Schale der Cuspidalfläche noch immer reell sein; ja auch die *reelle* Doppelkurve in der Ebene $\xi = -\sqrt[3]{\alpha_0^2}$ kann nicht isoliert verlaufen, weil sie der *reellen* Durchdringungskurve von C_2 und U_2 entspricht, welche die beiden Flächen im Halbraume der $+\,\xi$ besitzen, wie wir sofort sehen werden. Somit zeigt sich auch bei negativem α_0 eine Schale in dem dritten Quadranten, die an Lage und Gestalt sich wenig von der unterscheidet, welche für positive α_0 auftritt. *Ausser dieser Schale existiert im zweiten und dritten Raumquadranten kein Flächenteil von C_2 und U_2.* Daher kann gemäfs der Korrespondenzbetrachtungen des § 13 von der Doppelkurve C_{2d} in der Ebene $\eta = 0$ nur das Spiegelbild des Astes $A'\,B'$ zwei reelle Mäntel aufweisen, während alle übrigen Zweige isoliert verlaufen.

Denkt man sich also ein *zweites Ebenenpaar*, das man so deformiert, dafs seine in $\eta = 0$ gelegene Schnittlinie in diesen Zug $A'\,B'$ übergeht, und das überdies in dem geradlinigen Stück $\zeta = \eta = 0$ der Rückkehrskante zu einer neuen Schnittlinie zusammentritt, jenseits welcher es imaginär wird, so hat man auch *ein sehr einfaches Bild dieses Teiles der Cuspidalfläche* und der von ihm gebildeten Zellen.

Die beiden so deformierten Ebenenpaare lassen leicht Zahl und Lage der Zellen erkennen, in welche der Halbraum der positiven ξ geteilt wird:

Der Punkt $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\xi = +\sqrt[3]{\alpha_0^2}$ ist Knotenpunkt für die Taktfläche T_2', und Schnittpunkt der Doppelkurven von C_2 und

U_2 in der Ebene $\eta = 0$. Das Schema eines Schnittes $\xi < \sqrt[3]{\alpha_0^2}$ gibt Fig. 10, Taf. IV, das Schema für Schnitte $\xi > +\sqrt[3]{\alpha_0^2}$ liefert Fig. 11, Tafel IV. Durch den Punkt $\xi = +\sqrt[3]{\alpha_2}$ gehen die beiden Durchdringungskurven von C_2 und U_2, deren eine nach dem früheren wieder Oskulationskurve beider Flächen sein mufs, wegen der Korrespondenz mit der Rückkehrkante, und deren andere der Doppelkurve von C_2 in $\xi = -\sqrt[3]{\alpha_0^2}$ entspricht. Die unterscheidende Trennung beider gestaltet sich leicht mit Hilfe der Fläche $T_2' = 0$, deren Schnittkurve mit der Ebene $\eta = 0$ in die bezüglich der Ebene $\zeta = 0$ symmetrische Lage übergegangen ist, und deren Schnitte $\xi = -a$ nun Ellipsen, $\xi = +a$ Hyperbeln sind; die eine dieser Hyperbeln in der Ebene $\xi = +\sqrt[3]{\alpha_0^2}$ zerfällt in ein Geradenpaar.

Nach den Entwicklungen des § 14 durchsetzt T_2' keine der beiden Flächen C_2 und U_2, wohl aber berührt sie beide Flächen längs der Oskulationskurve; demgemäfs mufs sie (vergl. Fig. 10, Tafel IV), weil in den Zellen $\overline{1}$ und $\overline{3}$ liegend, in den Punkten α und α' berühren; folglich tritt für $\xi > \sqrt[3]{\alpha_0^2}$ die Oskulation auf jener der beiden Durchsetzungskurven ein, deren Punkte bei gleicher Ordinate ξ die kleinere Ordinate ζ haben; im Punkte $\xi = \sqrt[3]{\alpha_0^2}$ schneiden sich wieder alle Doppel- und Durchdringungskurven beider Flächen dieses Halbraumes und für $\xi > \sqrt[3]{\alpha_0^2}$ hat die Oskulationskurve bei gleicher Abscisse ξ die gröfsere Ordinate ζ mit den Berührpunkten β und β'.

Damit ist die Diskussion dieses Falles ohne jede Rechnung erledigt. Auf dem Gebiete der positiven ξ bilden C_2 und U_2 zunächst vier Mittelzellen, nämlich die beiden Zellen $\overline{1}$ und 3, und das gegen den Punkt $\xi = \sqrt[3]{\alpha_0^2}$ konisch verlaufende Zellenpaar 2 und $\overline{12}$, sodann die symmetrisch gelegenen Zellenpaare $\overline{4}$ 8, $\overline{5}$ $\overline{10}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$,*) $\overline{6}$, $\overline{9}$, $\overline{7}$, $\overline{11}$.

Hiezu treten im Halbraume der negativen ξ die vier Zellen der Cuspidalschale (Fig. 8, Tafel IV) $\overline{15}$ und $\overline{16}$, $\overline{17}$ und $\overline{18}$ und der aufser ihr gelegene Raum 19. Die Zahl der durch C_2 und U_2 gebildeten Zellen des Raumes R_2 ist also, wie nicht anders zu erwarten war, für negative Werte von α_0 genau dieselbe wie für positive Werte von α_0 und zwar sind sie genau wie früher auf beide Halbräume verteilt, 5 Zellen im einen, 14 im andern.

Die Fläche T_2 hängt von α_0 gar nicht ab, bleibt also unver-

*) $\overline{13}$ $\overline{19}$ hängen (wie $\overline{2}$ und $\overline{12}$) mit 5 und $\overline{10}$ konisch zusammen.

ändert und teilt wie früher die Zelle 19 in fünf Gebiete $\overline{19_a}$, $\overline{19_t}$, $\overline{19_u}$, $\overline{20}$ und $\overline{21}$. Die Fläche T_2' trennt von Zelle 19_u nur noch das Gebiet $\overline{19}$, von Zelle $\overline{19_t}$ das Gebiet $\overline{19_{t'}}$ ab.

Im Halbraume der negativen ξ sind auf diese Weise sechs weitere Zellen entstanden; im Halbraume der positiven ξ werden durch T_2' noch acht weitere Zellen gebildet. Von Zelle $\overline{3}$ trennt sie die Zellen $\overline{3_{t'}}$, $\overline{22}$, $\overline{23}$ und $\overline{24}$, und ebenso von Zelle $\overline{1}$ die Zellen $\overline{1_{t'}}$ $\overline{25}$, $\overline{26}$, $\overline{27}$. Die Summe der sich so ergebenen reellen Zellen des Raumes R_2 ist demnach 33, gegenüber 45 reellen Zellen für pos. Werte von α_0. 12 Zellen sind also imaginär geworden, was zum Teil davon herrührt, dafs die Durchdringungskurve von T_2 und U_2 nicht mehr reell ist.

Auf die Korrespondenz der einzelnen Zellen will ich nicht weiter eingehen, da die Untersuchung des Falles $\alpha_0 < 0$ nur den Zweck haben soll, die Existenz der für $+\alpha_0$ in R_2 ausgeschlossenen Kurven nachzuweisen.

Es möge hier nur noch die Charakteristik der einzelnen Zellen in Bezug auf die Realität der Wendepunkte, Doppelpunkte und Doppeltangenten wiedergegeben werden in Form einer Tabelle, die sich wie früher leicht herstellen läfst. Am einfachsten ermittelt man durch ein Zahlenbeispiel den Charakter Zelle $\overline{12}$, ($\alpha_0 = \beta_4 = -1$, $\beta_3 = 0$, $\alpha_2 = +3$). Man findet sofort: sechs reelle Wendepunkte, drei isolierte Doppelpunkte, drei reelle und (wie überhaupt im ganzen Halbraume der positiven ξ) eine isolierte Doppeltangente. Für die Zellendiskussion des Halbraumes der negativen ξ wird man als Ausgangspunkt Zelle 19_a wählen, ($\alpha_0 = -1$, $\alpha_2 = -3$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = +2$) welche charakterisiert ist durch: zwei reelle Wendepunkte, drei reelle Doppelpunkte und vier reelle Doppeltangenten.

Aus der nachfolgenden Tabelle geht hervor, dafs die Bedingung $\alpha_0 = -$ konst., wie auch zu erwarten war, eine Reihe von Typen aus der allgemeinen Betrachtung ausschliefst und zwar die sechs Typen

1, 2, 3, 13, 19, 21

mit 0 reellen Wendepunkten, die zwei Typen 17, 23 mit vier, und den einen Typus 10 mit sechs reellen Wendepunkten.

Für diese neun Typen ist also $\alpha_0 = +$ *konst. ebenso ein Charakteristikum, wie für die zehn Typen* 4, 5, 6, 7, 12, 20, 22, 24, 25, 26 die *Bedingung* $\alpha_0 = -$ konst.

Die Tabelle für $\alpha_0 = -$ konst. lautet:

Reelle Wendepunkte	Zellen	Doppelpunkte			Doppeltangenten			Typus auf Taf. III
		reell	isoliert	imag.	reell	isoliert	imag.	
	$\overline{1}$, $\overline{25}$, $\overline{26}$, $\overline{27}$	—	3	—	1	3	—	14
	$\overline{3}$, $\overline{22}$, $\overline{23}$, $\overline{24}$	2	1	—	3	1	—	9
	$\overline{1_t}$, $\overline{3_t}$,	—	1	2	1	1	2	18
2	$\overline{19_a}$, $\overline{6}$, $\overline{9}$	1	2	—	2	2	—	12
	$\overline{19}$, $\overline{19_t}$	1	—	2	2	—	2	20, 22
	$\overline{19_t}$	3	—	—	—	—	4	24, 25, 26
	$\overline{19_u}$, $\overline{20}$, $\overline{21}$	3	—	—	4	—	—	4, 5, 6, 7
	$\overline{4}$, $\overline{8}$, $\overline{7}$, $\overline{11}$	—	3	—	2	2	—	15
4	$\overline{5}$, $\overline{10}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$	1	2	—	3	1	—	11
	$\overline{15}$, $\overline{16}$, $\overline{17}$, $\overline{18}$	2	1	—	4	—	—	8
6	$\overline{2}$, $\overline{12}$	—	3	—	3	1	—	16

Die Tabelle lehrt, dafs in der That für $\alpha_0 = -$ konst. die für $\alpha_0 = +$ konst. im Raume R_2 fehlenden Typen auftreten. Zugleich sieht man aus ihr, dafs für negative Werte von α_0 *die Wendepunktsform* $W(\lambda\xi\eta\zeta) = 0$ *mindestens zwei reelle Wurzeln besitzt.*

§ 20. Schlufsbemerkungen.

Die vorliegende Untersuchung dürfte vielleicht eine hinreichende Grundlage bieten für das Studium der Kurventypen C^4 und deren Übergänge in einander. Hiebei ist es von wesentlicher Bedeutung, dafs sich die Doppelpunkts- und Doppeltangentenformen für den Raum R_2 explicit durch die Koefficienten der Wendepunktsform, und zwar als irrationale Kombinanten der C^4 darstellen liefsen. Alle Singularitäten lassen sich hiedurch verhältnismäfsig rasch ermitteln und durch die Transformation teilweise auch auf den Raum R_1 übertragen.

Für die Kurvenübergänge ist insbesondere auch die C^4 mit *dreifachem* Punkt von Bedeutung. Die Bedingung für denselben ergibt sich aus den Schnittpunktsgleichungen zweier Geraden, welche durch ihn und die Punkte 0 resp. ∞ gelegt sind.*) Man erhält:

$$\alpha_0\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \beta_2\beta_4 - \beta_3^2 = 0 \quad \text{(I)}$$

Für den Raum R_2 können wir sie auf die bemerkenswerte Form bringen:

*) Vergl. Grofs, Inauguraldissertation „Über Kombinanten binärer Formensysteme“ 1877.

$$T_2' - 16\alpha_0 \xi T_2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

„wo T_2 und T_2' die Bedingungen sind, dafs zwei Doppeltangenten zusammenfallen.“ Für den Raum R_1 reduziert sich (I) auf:

$$y^2 - 16\alpha_0 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Aus (II) ergibt sich die Bedeutung der Rückkehrkante von C_2 für die Kurven C^4. Denn diese Gleichung ist erfüllt, wenn T_2 und T_2' einzeln verschwinden. Der Schnitt beider Flächen ist aber gerade die Rückkehrkante. Demnach erkennen wir:

„*Jeder Punkt der Rückkehrkante Θ_{2a} repräsentiert eine Kurve mit zwei Spitzen, die in den dritten Doppelpunkt gerückt sind. (maskierte Singularität.)*“ *)

Kurven C^4 mit zwei Spitzen, resp. zwei Undulationspunkten liefern die Punkte der Doppelkurven C_{2a}, P_2' resp. U_{2a}, und die entsprechenden im Raume R_1.

Kurven mit drei Spitzen liefert die Gerade $\zeta = \xi = 0$ im Raume R_2; und der Punkt $x = z = -3$, $y = \pm 4$ im Raume R_1; Kurven mit drei Undulationstangenten liefert derselbe Punkt im Raume R_1, d. h. der Punkt selbst repräsentiert eine Kurve, die sich auf drei zusammenfallende Punkte zusammengezogen hat. Macht man aber die Faktoren C_1 und U_1 durch α_0 und α_6 homogen und isobar, so erhält man aus ihnen durch die Substitution $x = z$, $y = \pm 4$ Bedingungsgleichungen für α_0. Die Werte α_0, welche dieselben befriedigen, liefern Kurven mit drei Spitzen, resp. drei Undulationstangenten.

Verbindet man die Bedingung (I) mit der Bedingung $C_2 = 0$, so erhält man Kurven C^4, deren dreifacher Punkt aus einer Spitze mit durchgehendem einfachen Kurvenast besteht. Die Punkte der Kurven Θ_2 des Raumes R_2 und Θ_1 des Raumes R_1, in welchen sich die Flächen C und U oskulieren und gleichzeitig von der Taktfläche berührt werden, repräsentieren Kurven, welche eine Spitze, eine Undulationstangente und einen Selbstberührungspunkt *gleichzeitig* und im allgemeinen getrennt besitzen. $\Theta_i = 0$ ist also jedenfalls eine der Bedingungen, dafs die C^4 eine *Berührungsknotenspitze* aufweist, in der eine Spitze mit einem Selbstberührungspunkt vereinigt ist. Die andere erhält man, wenn man die zur Spitze gehörigen Doppelpunktsform φ_i proportional setzt, der Doppeltangentenform f_i des Selbstberührungspunktes.

*) Siehe wegen dieser Singularität, Salmon-Fiedler, ebene Kurven, zweite Auflage, Seite 280, 7.

„*Kurven mit Oskulationsknoten**) *werden im Raume* R_1 *von der Fläche* $y^2 - 16\alpha_0 = 0$ *an der Fläche* $T_1 = 0$ *ausgeschnitten.*“

Denn die erste Bedingung erfordert einen dreifachen Punkt, die zweite eine Selbstberührung. Beide Singularitäten können nicht getrennt auftreten, da die Kurve sonst fünf Doppelpunkte haben müfste.

Die Punkte, welche zerfallende Kurven repräsentieren, erhält man unter Benützung der Bedingungen die Herr Prf. Brill**) bereits hiefür aufgestellt hat. Verschwindet die Resultante zweier Doppelpunktsformen, ohne dafs alle drei Formen φ_i einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so zerfällt C^4 in eine Gerade und eine C^3. Verschwindet die Kombinante $(\varphi_1\varphi_2)\ (\varphi_1\varphi_3)\ (\varphi_2\varphi_3)$ aller drei Formen, so spaltet sich die Kurve C^4 in zwei Kegelschnitte.

Beide Bedingungen lassen sich im Raume R_2 allgemein in Funktion von $\xi\eta\zeta$, im Raume R_1, wenigstens für die Ebene $x = z$ explicit darstellen. Ich habe indes die beiden Räume nach dieser Richtung noch nicht untersucht.

Bisweilen führt eine oder mehrere der bisher erwähnten Bedingungen für höhere Singularitäten auf identisch verschwindende Formen W, f_i, φ_i. Beispielsweise führt die Bedingung, dafs eine C^4 gleichzeitig zwei Spitzen und zwei Undulationstangenten besitze auf die Doppelkurve $y = 0$, $xz - \alpha_0\alpha_6 = 0$, welche im Raume R_1 den beiden Flächen U_1 und C_1 gemeinschaftlich angehört. Für sie verschwindet $W(\lambda xyz) = 0$ identisch; es ist dies aber eine Folge davon, dafs wir genötigt waren, gebrochene Funktionen von x, y, z als Koefficienten der Form $W = 0$ einzuführen. In solchen Fällen hat man alsdann auf die ursprüngliche Form $W(\alpha_i\ \beta_i\ \lambda)$ zurückzugehen, welche dann gleichzeitig mit den Formen φ_i und f_i eine so einfache Gestalt annimmt, dafs die Diskussion keine Schwierigkeiten mehr bietet. Ein Beispiel hiefür bietet der in § 19 besprochene Fall $\alpha_0 = 0$; alle Kurven C^4 die einen Selbstberührungspunkt aufweisen, lassen sich, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, hier sehr einfach studieren.

In den Tabellen der §§ 15 und 16 lassen sich die Zellen wiederum durch Vorzeichenkombinationen der Flächen C, U, T etc. charakterisieren. Die vollständige Trennung gelingt jedoch nur unter Benützung einer so grofsen Zahl von Invarianten, dafs die Brauchbarkeit einer solchen Charakteristik zweifelhaft wird. Ich will daher, unter Verzicht auf eine völlige Trennung, die Vorzeichenkombinationen

*) Vergl. Salmon-Fiedler a. a. O.

**) Vergl. Math. Ann. Bd. XII, Seite 90.

nur für die Haupttypen wiedergeben. Indem ich mich auch hiebei auf den Raum R_2 beschränke, setze ich voraus, dafs die Kurve C^4 bezogen auf ein Doppeltangentendreieck in der Form gegeben sei

$$\rho x_1 = \lambda^4 + 2a\lambda^2 + a^2$$
$$\rho x_2 = \lambda^4 + 2b\lambda^2 + b^2$$
$$\rho x_3 = \lambda^4 + 2c\lambda^3 + (c^2 + 2d)\,\lambda^2 + 2cd\lambda + d^2,$$

und unterscheide zwischen $\alpha_0 = +$ konst. und $\alpha_0 = -$ konst.

Die beiden Tabellen lösen alsdann in Verbindung mit denen der §§ 13 und 14 die Eingangs gestellte Frage: „Welche fünf Kurventypen gehören zu einer vorgegebenen Wendepunktsgleichung?“

Hat z. B. die Gleichung 6ten Grades sechs reelle Wurzeln, so gehören zu ihr immer *drei* C^4 mit einem reellen, zwei isolierten Doppelpunkten und vier reellen Doppeltangenten, und *zwei* C^4 mit drei isolierten Doppelpunkten, drei reellen und einer isolierten Doppeltangente.

Oder: Hat die Gleichung 6ten Grades keine reelle Wurzel, so sind zwei Fälle möglich. Entweder gehören zu ihr immer *drei* C^4 mit drei isolierten Doppelpunkten, vier isolierten Doppeltangenten, und *zwei* C^4 mit drei reellen Doppelpunkten, drei reellen und einer isolierten Doppeltangente, oder es gehören zu ihr *zwei* C^4 mit einem reellen, zwei imaginären Doppelpunkten, einer reellen, einer isolierten und zwei imaginären Doppeltangenten, *eine* C^4 mit einem isolierten und zwei imaginären Doppelpunkten, zwei isolierten und zwei imaginären Doppeltangenten und *zwei* C^4, die überhaupt imaginär sind.

Es ist hiebei bemerkenswert, dafs zu einer gegebenen Wendepunktsform niemals fünf Kurven C^4 zugehören, die auch fünf verschiedene Typen repräsentieren. Für $\alpha_0 = +$ konst. erkennt man dies direkt aus den Tabellen; ebenso läfst sich dies für $\alpha_0 = -$ konst. zeigen, wenn man die Korrespondenzbetrachtungen des § 13 für diesen Fall modificiert. Alle dort aufgestellten Sätze gelten auch für $\alpha_0 = -$ konst., nur der Sinn der Bewegung ist der entgegengesetzte geworden, so dafs die sich selbst dreifach entsprechenden Zellen im zweiten Raumquadranten liegen, also im Raume $\xi = -, \zeta = +$, während sie für $\alpha_0 = +$ konst. im Raumquadranten $\xi = -, \zeta = -$ sich befinden.

$\alpha_0 = +$ konst.

Reelle Wendepunkte	Doppelpunkte			Doppel-Tangenten			Kriterien						Typus	Zellen
	r.	is.	im.	r.	is.	im.	C_2	U_2	T_2'	T_2	α_2	β_4		
0	3	0	0	3	1	0	−	+	+	+	+	·	1 2 3	$\overline{2}$
	1	0	2	1	1	2	−	+	−	+	+	+	21	$\overline{2_t}$
	0	3	0	0	4	0	+	−	+	+	−	+	13	$\overline{12}$
	0	1	2	0	2	2	+	−	−	+	−	+	19	$\overline{12_t}$ $\overline{12_{t'}}$
2	2	1	0	3	1	0	+	+	+	+	±	·	9	$\overline{4}$ $\overline{5}$ $\overline{11_u}$ $\overline{12_u}$
	0	3	0	1	3	0	+	+	+	+	−	+	14	$\overline{11}$ $\overline{18}$
	0	1	2	1	1	2	+	+	+	−	−	·	18	$\overline{11_t}$ $\overline{18_t}$
4	2	1	0	0	0	4	+	−	−	−	−	−	23	$\overline{19_{t'}}$
	2	1	0	4	0	0	+	−	+	+	−	−	8	$\overline{20}$—$\overline{23}$, $\overline{20'}$—$\overline{23'}$
	1	2	0	3	1	0	−	+	+	+	·	·	11	$\overline{1}$ $\overline{3}$ $\overline{7}$ $\overline{8}$ $\overline{14}$ $\overline{15}$
	0	3	0	2	2	0	+	−	+	+	−	·	15	$\overline{19_u}$ $\overline{19'_u}$ $\overline{19_a}$ $\overline{19_b}$
	0	1	2	0	2	2	+	−	+	−	−	·	17	$\overline{19}$ $\overline{19_t}$
6	1	2	0	4	0	0	−	−	+	+	−	−	10	$\overline{6}$ $\overline{9}$ $\overline{13}$ $\overline{16}$
	0	3	0	3	1	0	+	+	+	+	−	−	16	$\overline{10}$ $\overline{17}$

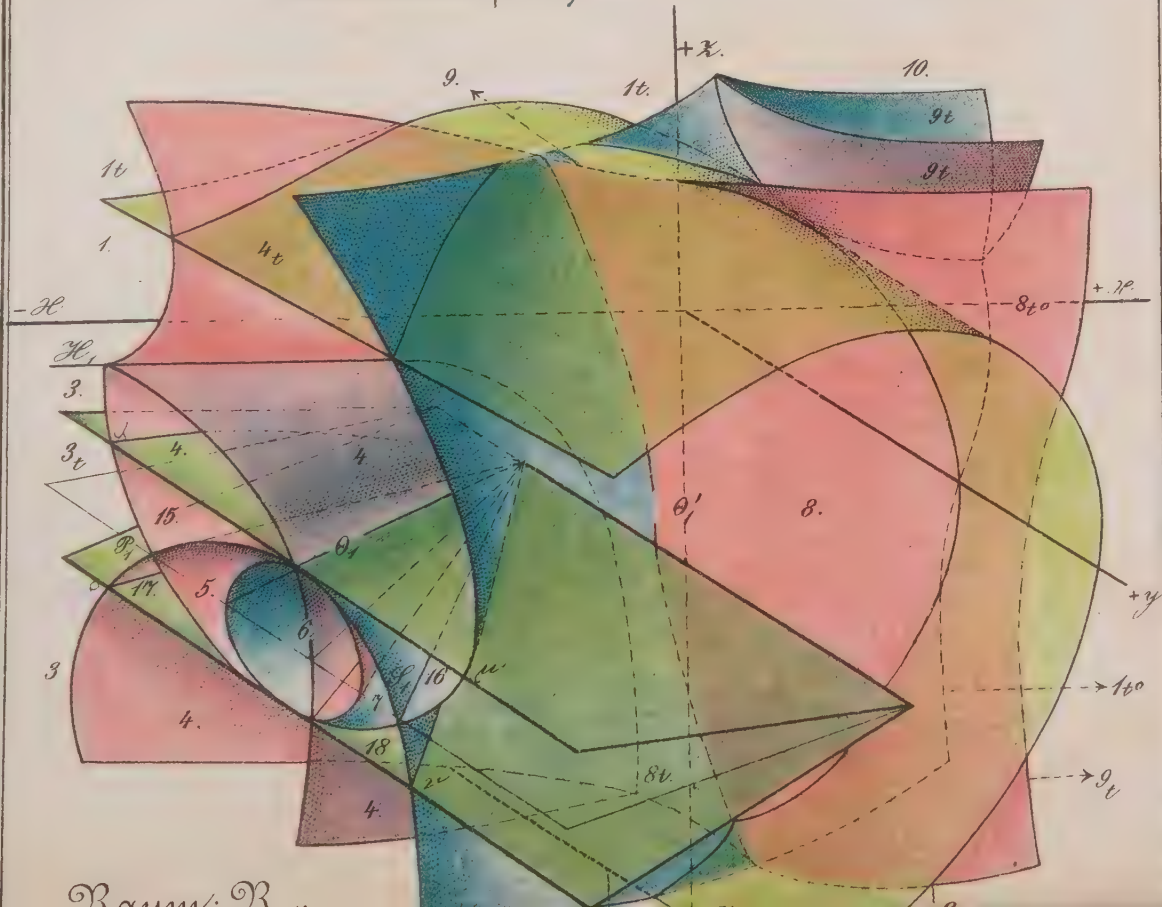
$\alpha_0 = -$ konst.

Reelle Wendepunkte	Doppelpunkte			Doppel-Tangenten			Kriterien						Typus	Zellen
	r.	is.	im.	r.	is.	im.	C_2	U_2	T_2'	T_2	α_2	β_4		
2	3	0	0	4	0	0	+	−	+	+	−	−	4—7	$\overline{19_u}$ $\overline{20}$ $\overline{21}$
	3	0	0	0	0	4	+	−	−	−	−	−	24—26	$\overline{19_{t'}}$
	1	0	2	2	0	2	+	−	±	∓	−	·	20 22	$\overline{19}$ $\overline{19_t}$
	1	2	0	2	2	0	+	−	+	+	·	·	12	$\overline{19_a}$ $\overline{6}$ $\overline{9}$
	2	1	0	3	1	0	−	+	+	+	+	−	9	$\overline{3}$ $\overline{22}$—$\overline{24}$
	0	3	0	1	3	0	−	+	+	+	+	+	14	$\overline{1}$ $\overline{25}$—$\overline{27}$
	0	1	2	1	1	2	−	+	−	+	+	·	18	$\overline{1_{t'}}$ $\overline{3_{t'}}$
4	2	1	0	4	0	0	−	−	+	+	−	−	8	$\overline{15}$—$\overline{18}$
	1	2	0	3	1	0	+	+	+	+	+	·	11	$\overline{5}$ $\overline{10}$ $\overline{13}$ $\overline{14}$
	0	3	0	2	2	0	−	−	+	+	+	·	15	$\overline{4}$ $\overline{8}$ $\overline{7}$ $\overline{11}$
6	0	3	0	3	1	0	−	+	+	+	+	·	16	$\overline{2}$ $\overline{12}$

Tafel I

Cuspidalfläche C_1 — Tactfläche T_1 — Fig. 1.

Undulationsfl. U_1 — Coincidenzfl Θ_1



Raum R_1

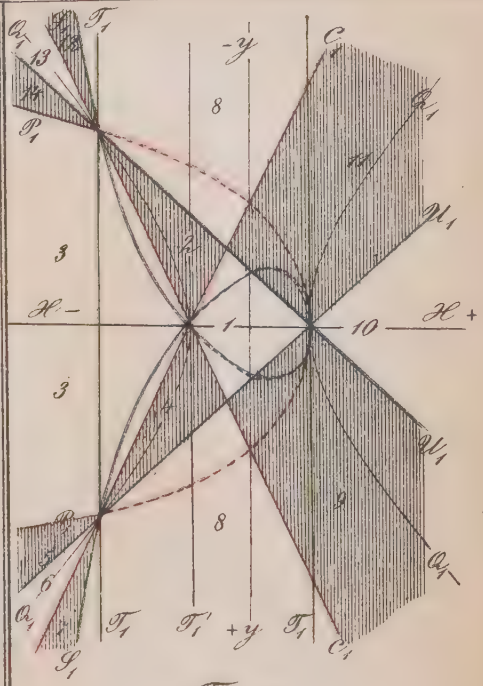
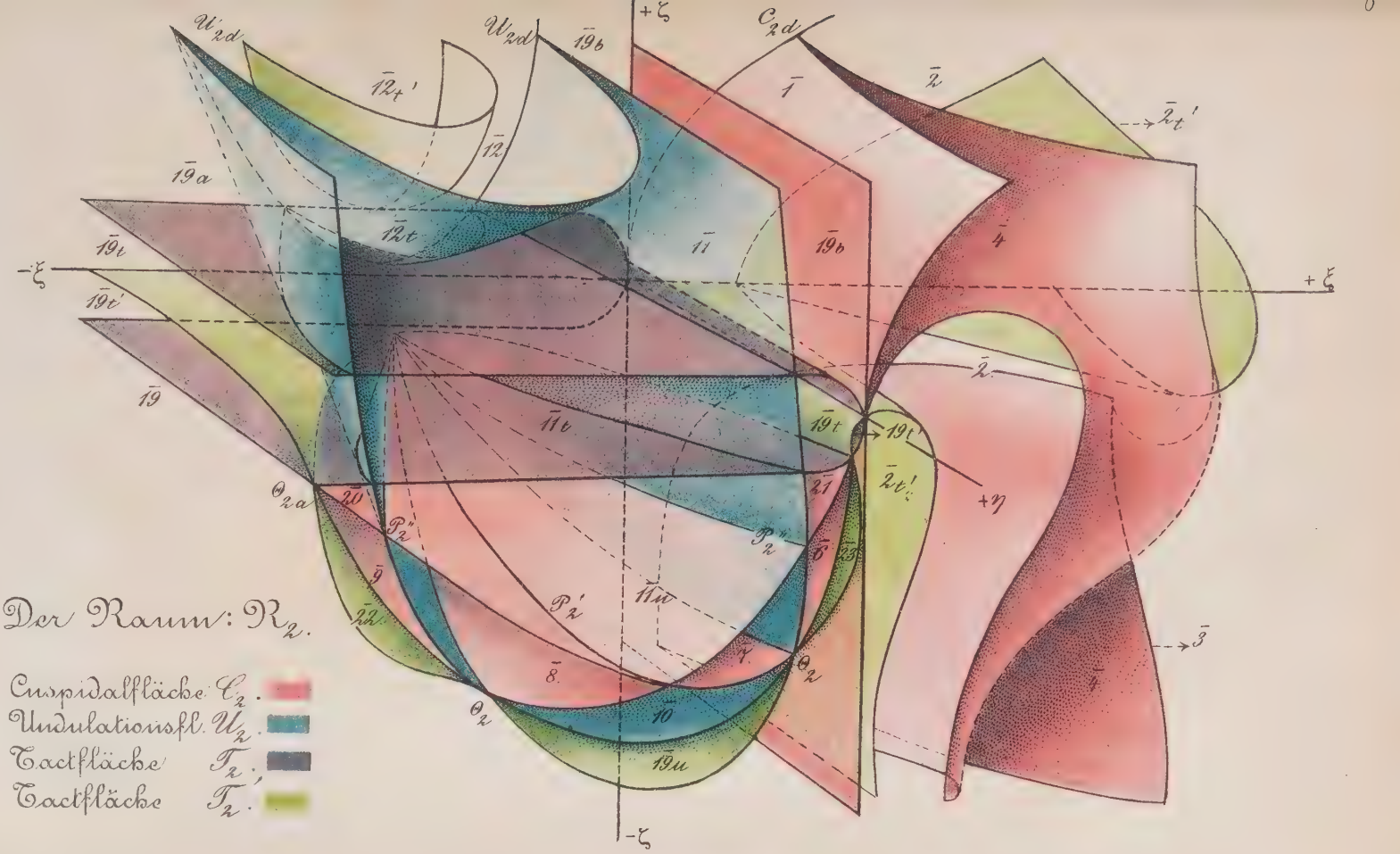


Fig: 2

Schnitt der Ebene $H=z$
mit den Flächen
$C_1\ U_1\ T_1\ T_1'\ \Theta_1$
des Raumes R_1.



Chemigraph. Institut F. Thuringer Nbg.

Tafel IV.

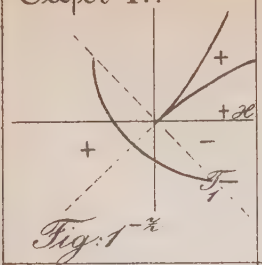


Fig: 1

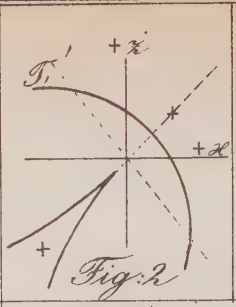


Fig: 2

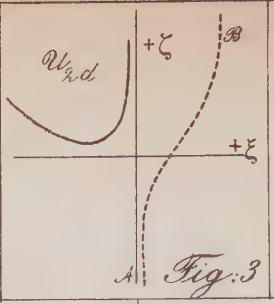


Fig: 3

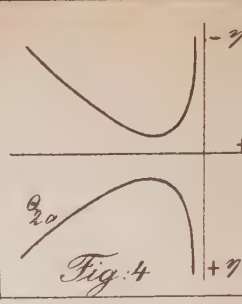


Fig: 4

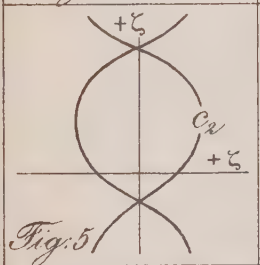


Fig: 5

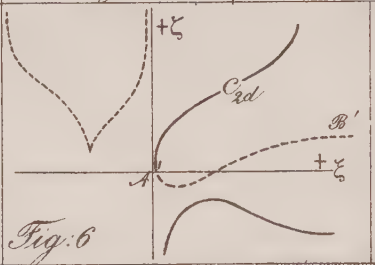


Fig: 6

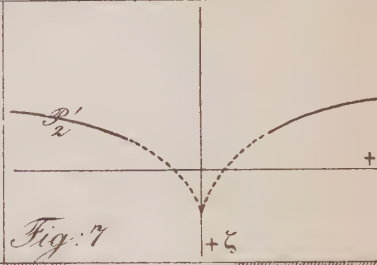


Fig: 7

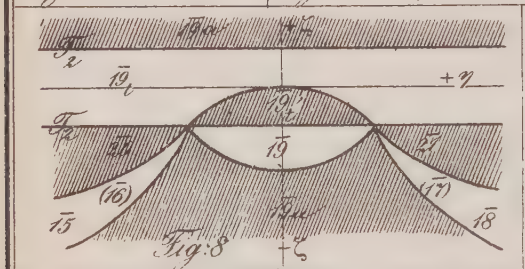


Fig: 8

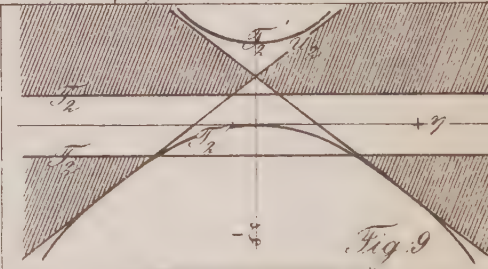


Fig: 9

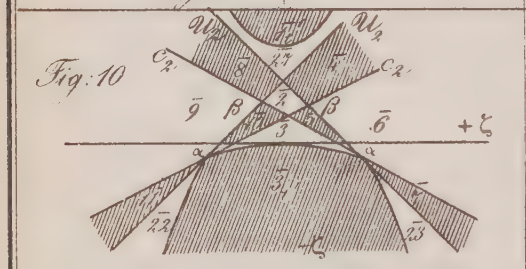


Fig: 10

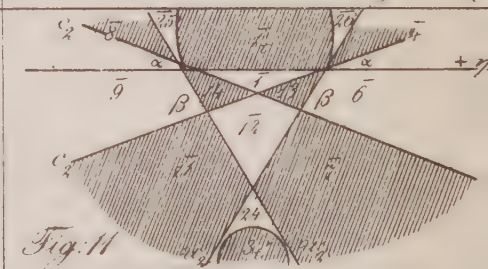


Fig: 11

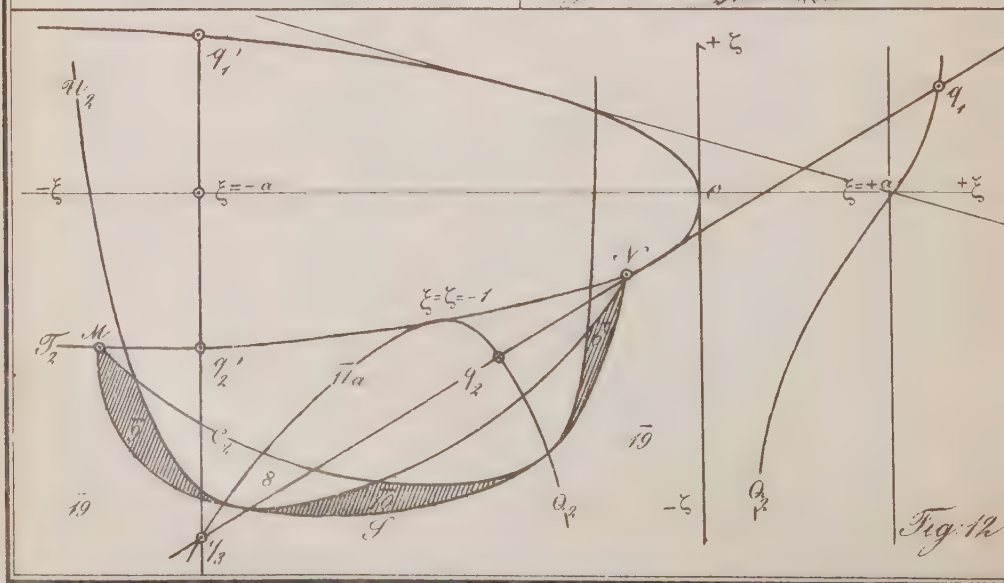
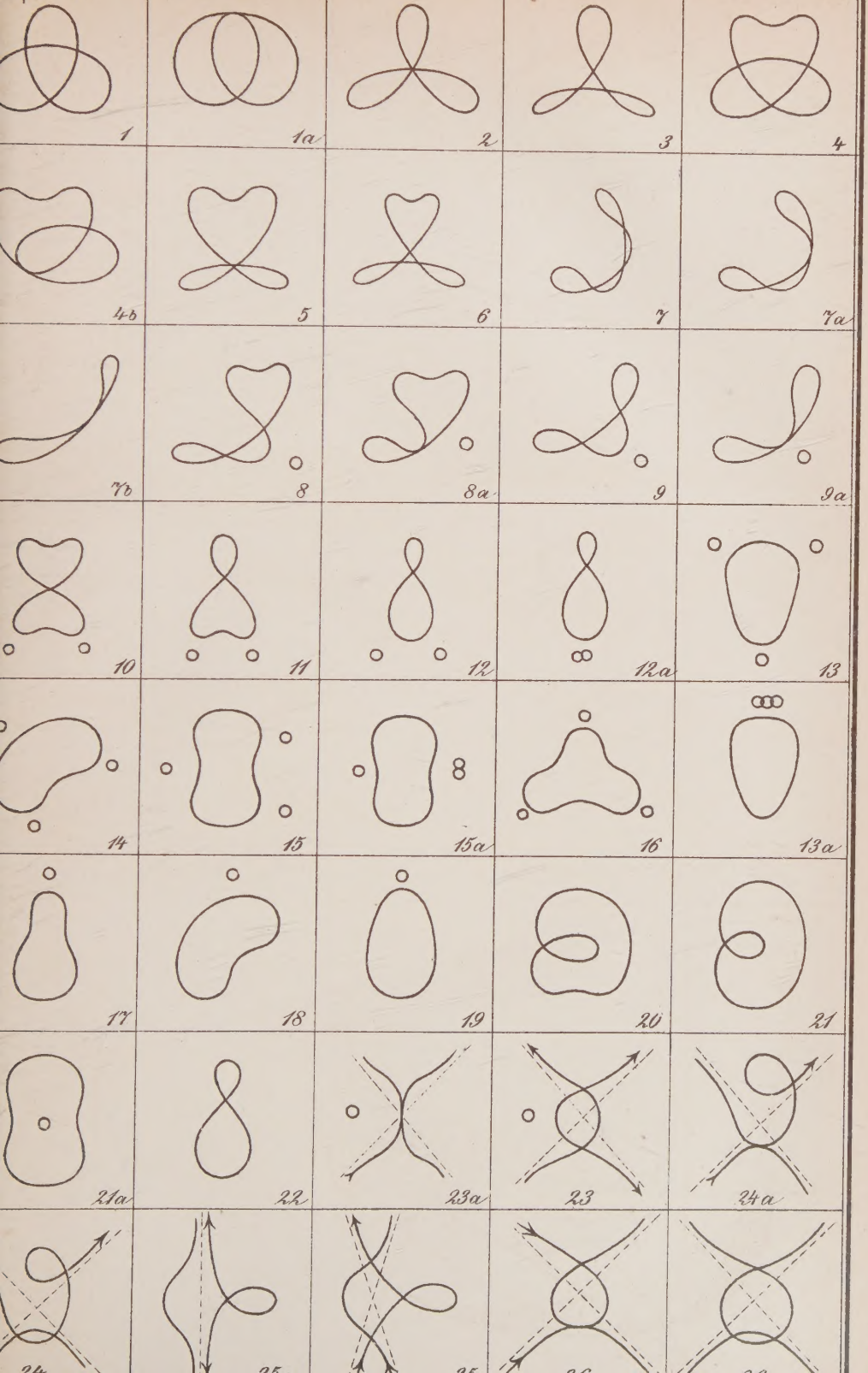
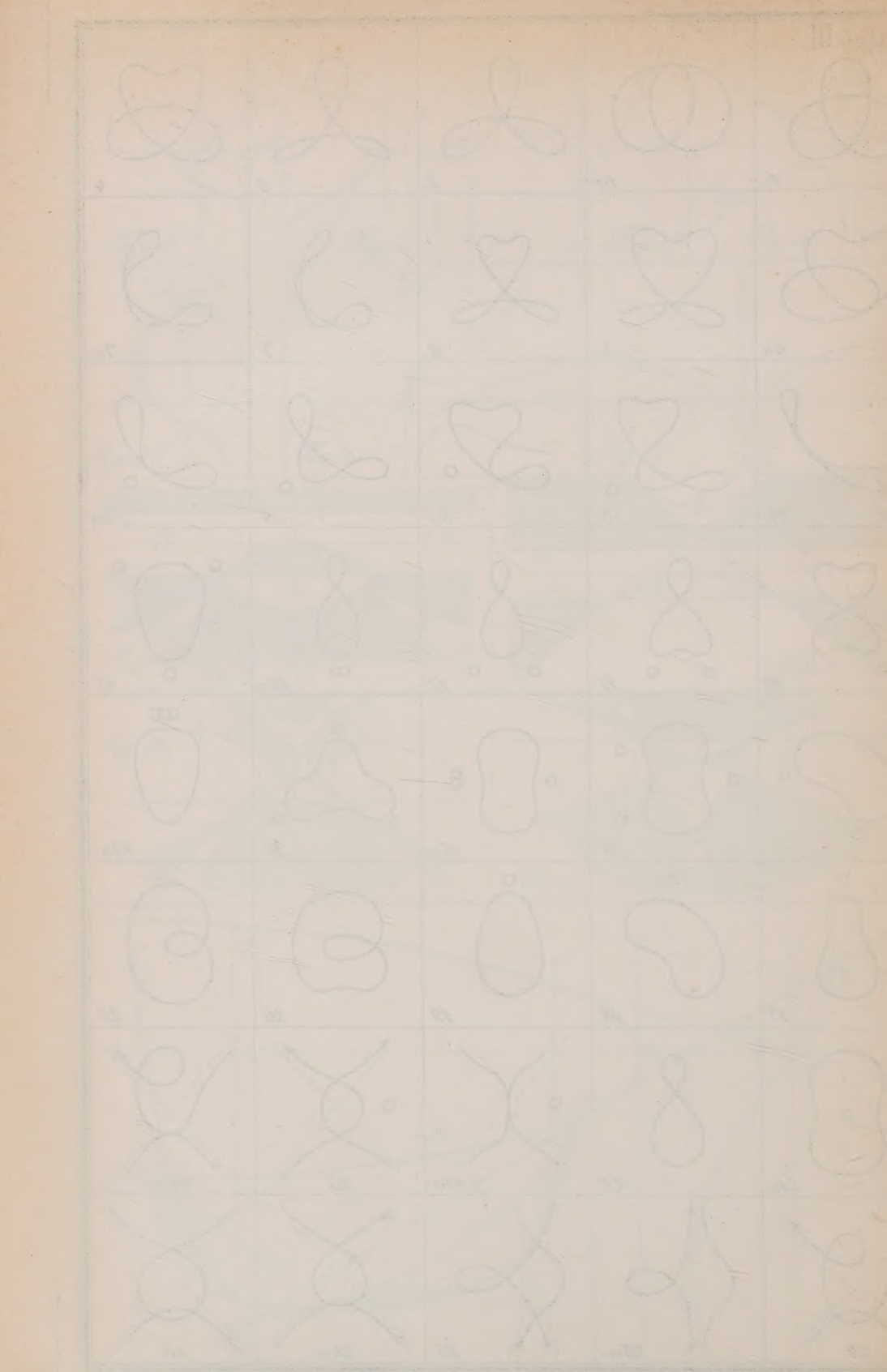


Fig: 12

Tafel III.


1
1a
2
3
4
4b
5
6
7
7a
7b
8
8a
9
9a
10
11
12
12a
13
14
15
15a
16
13a
17
18
19
20
21
21a
22
23a
23
24a